STRUKTURANALYSE UND OPTIMIERUNG GEMISCHT-GANZZAHLIGER LINEARER PROGRAMMIERUNGSPROBLEME AUF GRUPPENTHEORETISCHER GRUNDLAGE

Inauguraldissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Wirtschaftswissenschaften
(doctor rerum oeconomicarum)

der Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen
Fakultät der Universität des Saarlandes

von

Ludwig Nastansky

Saarbrücken

1971

STRUKTURANALYSE UND OPTIMIERUNG GEMISCHT-GANZZAHLIGER LINEARER PROGRAMMIERUNGSPROBLEME AUF GRUPPENTHEORETISCHER GRUNDLAGE

Inauguraldissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Wirtschaftswissenschaften
(doctor rerum oeconomicarum)

der Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen
Fakultät der Universität des Saarlandes

von

Ludwig Nastansky

Saarbrücken

1971

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der Disputation : 21. Juli 1971

Dekan : Prof. Dr. Wilhelm Karl Geck, M.A.
Erstberichterstatter : Prof. Dr. Herbert Hax
Zweitberichterstatter: Prof. Dr. Hans Schneeweiss

Inhaltsverzeichnis

		Seite
	Einführung	1
	a) Zur Klassifizierung von Lösungsverfahren der GGLP-Optimierung	1
	b) Gruppentheoretische RGLP-Ansätze	3
	c) Ziel und Gang der Untersuchung	5
1	Typ des untersuchten gemischt-ganzzahligen linearen Programmierungsansatzes	7
	a) Ausgangsproblem	7
	b) Eigenschaften des Ausgangsproblems	8
	c) Auflösung nach dem Basisteil	11
	d) Sortierung	13
	e) Endgültiges GGLP-Problem	16
	f) Interpretation GGLP-Problem	17
	g) Zahlenbeispiel	19
2	Gruppentheoretische Strukturanalyse gemischt-ganzzahliger linearer Programmierungsansätze	22
	21 Einführung	22
	22 Grundlagen der Gruppen- und der Gittertheorie	23
	221 Gruppentheorie	23
	a) Grundbegriffe	23
	b) Restklassen	29
	c) Isomorphismus und Homomorphismus	31
	d) Faktorgruppen	35
	e) Zusammenfassung	36
	222 Gittertheorie	39
	a) Gitter	39
	b) Unimodularität der Gitterbasiswechsel	40
	c) Elementarteilersatz	42
	d) Umwandlungsregeln für unimodulare Transformationen von Rechtecksmatrizen	43
	e) SMITH'sche Normalform	45
	f) HU'scher Algorithmus zur Elementarteilerableitung	46
	g) Darstellung der Elementarteilerableitung durch Links- und Rechtsmultiplikation	51
	h) Elementarteiler und Determinantenteiler	54
	i) Teilbarkeitseigenschaften	55
	j) Zahlenbeispiel	58

Seite

23 Ganzzahligkeitsbedingung für ganzzahlige Basisvariable als Kongruenz 63

231 Strukturierung der Koeffizientenmatrix durch Dekomposition von B 63

a) Problemstellung 63
b) Ausgangspunkt der Strukturierung 64
c) Algorithmus zur Strukturierung 66
d) Unimodularität der Strukturierung 68
e) Art der Struktur von $\underline{B}$ 70
f) Struktur von $\underline{B}^{-1}$ 73
g) Zahlenbeispiel 77

232 Ableitung der Kongruenz aus der strukturierten Koeffizientenmatrix des gemischt-ganzzahligen Programmierungsproblems 81

a) Problemstellung 81
b) Ganzzahligkeitsbedingung auf der Grundlage von Gittern 82
c) Homomorphismus $\nu_S : G(E) \to G_{BZ}$ 85
d) Ganzzahligkeitsbedingung als Kongruenz in G_{BZ} 88
e) Prinzipielle Behandlung des nichtganzzahligen Nebenbasisteils 90
f) Homomorphismus $\nu_E : G(\underline{B}_{Z1}^{-1}) \to G_{B^{-1}Z}$ 93
g) Ganzzahligkeitsbedingung als Kongruenz in $G_{B^{-1}Z}$ 96
h) Resteigenschaften der Koeffizienten aus Problem (1 -13-α) 98
i) Zusammenfassung 102
j) Zahlenbeispiel 104

233 Kongruenz für das rein-ganzzahlige Problem als Spezialfall für das gemischt-ganzzahlige Problem 110

24 Ableitung ganzzahliger Vektoren aus dem nichtganzzahligen Nebenbasisteil 114

241 Problemstellung 114

242 Die Erzeugung ganzzahliger Vektoren durch Linearkombination ganzzahliger Vektoren mit rationalen Linearfaktoren 117

a) Einschränkung der Zahl untersuchter Linearfaktoren 117
b) Festlegung von $\underset{\sim}{N}_{Q1}$ 119
c) Erzeugung ganzzahliger Vektoren über $\underset{\sim}{N}_{Q1}$ durch rationale Linearfaktoren kleiner 1 121
d) Erzeugung ganzzahliger Vektoren über $\underset{\sim}{N}_{Q1}$ durch allgemeine rationale Linearfaktoren 127
e) Erzeugung ganzzahliger Vektoren über $\underline{N}_{Q1}$ durch rationale Linearfaktoren 129
f) Struktur der nichtganzzahligen Nebenbasisvariablen 131
g) Struktur der durch $\underline{N}_{Q1}$ erzeugten ganzzahligen Vektoren 133
h) Zur algorithmischen Bestimmung von K_{NQ} und G_{NQ}^{OB} 135
i) Zahlenbeispiel 139

Seite

3 Optimierung gemischt-ganzzahliger linearer Programmierungsansätze auf gruppentheoretischer Grundlage 145

31 Einführung 145

32 Gruppenminimierungsproblem 148

321 Asymptotische gemischt-ganzzahlige lineare Programmierung 148

a) Vorbemerkung 148
b) Formulierung und Interpretation der asymptotischen GGLP-Aufgabe 150
c) Umformulierung des nichtganzzahligen Nebenbasisteils 157
d) Formulierung des Gruppenminimierungsproblems 162
e) Korrespondenz zwischen Gruppenminimierungsproblem und GGLP-Problem 169
f) Notwendige Bedingungen für die Existenz von GGLP-Lösungen 171
g) Zur Lösung des Gruppenminimierungsproblems 176
h) Das Polyeder $P_{\bar{x}_N}(G_{BZ}, K_{BZ}^N, \bar{g}_0) = P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_0)$ 178
i) Zulässigkeitskriterien von Basislösungen in der Beziehung zwischen B und $\bar{b}$ 184
j) Hinreichende Bedingung für Zulässigkeit des asymptotischen Optimums 188
k) Zusammenfassung Gruppenoptimierung 193
l) Zahlenbeispiel 195

322 Sensitivitätsanalyse für die rechte Seite $\bar{b}$ des gemischt-ganzzahligen linearen Programmierungsproblems 208

a) Aufgabenstellung 208
b) Interpretation der Zielfunktionskorrektur vom optimalen LP- zum optimalen GGLP-Wert 210
c) Lösungsreaktion bei marginalen Änderungen von $\bar{b}$ 214
d) Größe der Zielfunktionskorrektur in der Marginalbetrachtung 218
e) Lösungsreaktionen bei allgemeinen Änderungen von $\bar{b}$ 219
f) Zahlenbeispiel 221

33 Das GGLP-Polyeder 227

a) Problemstellung 227
b) Grundsätzliche Veranschaulichung des GGLP-Polyeders an einem Beispiel 228
c) Beziehungen zwischen Lösungen des Gruppenminimierungsproblems und $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_0)$ 233
d) Beziehungen zwischen $P_{\bar{x}_B}(B, N, \bar{b})$ und $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_0)$ 237
e) Zahl positiver GGLP-Variabler in GGLP-Ecklösung 241
f) Ableitung von "strengsten" Schnittebenen an LP-Eckpunkten 244
g) Grundsätzliche Berechnungsmöglichkeit der Außenflächen des GGLP-Polyeders 248

Seite

h) Sensitivitätsanalyse in bezug auf die GGLP-Zielfunktion 252
i) Zahlenbeispiel 254

Literaturverzeichnis 266

Abkürzungen 269

Sonderzeichen 269

Symbolverzeichnis 270

- Indizes 270
- Matrizen und Mengen 271
- Vektoren 274
- sonstige Alphabetzeichen 276

Tabellenverzeichnis 277

Einführung

Auf dem Gebiet der Unternehmensforschung werden zwei Problemkreise behandelt. Einmal geht es in einer anwendungsorientierten Betrachtung darum, Entscheidungssituationen daraufhin zu überprüfen, ob sie sich als ein mathematisches Modell formulieren lassen, und, bei einem positiven Ergebnis dieser Analyse, die Abbildung des vorliegenden Entscheidungsproblems in einen solchen Ansatz vorzunehmen. Zum zweiten lautet die vom algorithmischen Standpunkt her gegebene Fragestellung, für Modelle einer bestimmten mathematischen Struktur Lösungsverfahren zu entwickeln.

In dieser Arbeit wird der zweite Problemkreis behandelt.

Für die Untersuchung gemischt-ganzzahliger linearer Programmierungsprobleme sprechen dabei insbesondere folgende Gründe aus beiden der erwähnten Forschungsbereiche.

Einmal hat sich in den letzten Jahren gezeigt, daß die Mehrzahl praktischer Aufgabenstellungen der linearen Programmierung zu gemischt-ganzzahligen Ansätzen führen, sei es aus dem Grunde, daß einige der vom Problem vorgegebenen Variablen nicht-teilbare Größen repräsentieren, oder sei es deshalb, weil logische Nebenbedingungen bei sonst nichtganzzahligen Zusammenhängen die Einführung zusätzlicher ganzzahliger Variablen bedingen.

Zum zweiten sind aus dem Gesichtswinkel der Optimierungsalgorithmen weitere Impulse gegeben, da in jüngster Zeit neuarti-

ge gruppentheoretische Ansätze für die rein-ganzzahlige Programmierung entwickelt wurden, deren Vorteile es sinnvoll erscheinen lassen, sie auch für das gemischt-ganzzahlige Problem nutzbar zu machen.

In dieser Arbeit soll deshalb, in Erweiterung dieser Ansätze, eine Strukturanalyse gemischt-ganzzahliger linearer Programmierungsprobleme auf gruppentheoretischer Grundlage vorgenommen werden. Damit gegebene Möglichkeiten für den Entwurf von Optimierungsalgorithmen für gemischt-ganzzahlige Aufgaben gehören ebenfalls zum Gegenstand der Untersuchung.

(a) Zur Klassifizierung von Lösungsverfahren der GGLP-Optimierung

Bei der Vielzahl von Kriterien, anhand derer man die bisher entworfenen GGLP-Optimierungsalgorithmen charakterisieren kann, ist eine allgemeingültige Klassifizierung kaum möglich. Für die am häufigsten diskutierten Verfahren kann man jedoch eine Dreiteilung in: Schnittebenenverfahren, branch-and-bound Methoden und partitioning Ansätze vornehmen.

Die Schnittebenenalgorithmen gehen auf die Ende der 50er Jahre veröffentlichten Arbeiten von GOMORY zurück [1958; 1959]. Die ursprünglichen Kriterien zur Ableitung von "fractional-cuts" wurden seither laufend verbessert, und durch ablauftechnische Neuerungen gelang es gleichfalls, diese Algorithmen effizienter zu machen. An der grundsätzlichen Rundungsfehleranfälligkeit dieser Ansätze änderte sich jedoch nichts. Neuen Auftrieb für Schnittebenenverfahren haben Methoden gebracht, die mit der Ableitung sog. "intersection-cuts" eine gegenüber den GOMORY-Varianten neuartige Technik der Ableitung von Schnittebenen aufweisen (BALAS [1969; 1970]). Die Idee dieses Verfah-

rens ist, um den optimalen LP-Eckpunkt eines GLP-Problems Körper zu konstruieren, z.B. Hyper-Kugeln und -Oktaeder, deren Außenflächen die linearen Nebenbedingungen der GLP-Aufgabe schneiden. Über diese Schnitte lassen sich Schnittebenen ableiten, welche wie die fractional-cuts garantieren, daß keine zulässigen GLP-Punkte durch die Reduzierung des Zulässigkeitsbereichs eliminiert werden.

Die von LAND-DOIG [1960] entwickelte "branch-and-bound" Technik läßt sich für die Lösung von GGLP-Problemen verwenden, wie auch für die Lösung von Problemkreisen einer andersartigen mathematischen Struktur. Dies hat die Entwicklung in den letzten zehn Jahren gezeigt, die zu einer gegenüber der ursprünglichen Konzeption erheblichen Verbesserung dieser Methoden geführt hat. Eine auf der Grundlage dieses Fortschritts allgemeine Neuformulierung der theoretischen Prinzipien des branch-and-bound findet sich bei MITTEN [1970].

Das Kennzeichen der "partitioning" Ansätze zur Lösung von GGLP-Aufgaben ist die aus einer Dualisierung des Problems mögliche Zerlegung des Programmierungsansatzes in eine LP- und eine RGLP-Phase. Zwischen diesen beiden Phasen iterieren die Verfahren, wobei für die RGLP-Stufe eine Methode zur RGLP-Optimierung angewandt werden muß. Bekannte Verfahren dieser Art stammen von BENDERS [1962] und von BALAS [1968-2]; diese letzte Arbeit wurde von BALAS im Rahmen einer ausführlichen Dualitätstheorie über diskrete Programmierung erarbeitet.

(b) Gruppentheoretische RGLP-Ansätze

In den letzten Jahren wurden auf der Grundlage der Gruppentheorie neuartige Ansätze für die RGLP-Optimierung entwickelt. Die-

se Verfahren lassen sich nicht anderen schon bekannten RGLP-Untersuchungen zuordnen und passen entsprechend auch nicht in das unter (a) vorgetragene Schema, das zwar für GGLP-Algorithmen aufgestellt wurde, aber auch Verfahren umfaßt, die gleichermaßen für RGLP-Aufgaben angewandt werden können.

Die gruppentheoretische Analyse des RGLP-Problems geht auf GOMORY zurück. GOMORY's Untersuchungen reichen von ersten Bemerkungen über die Gruppenstruktur der Reste seiner fractional-cuts (z.B. [1958]) über die Formulierung eines auf gruppentheoretischer Basis aufgestellten Optimierungsansatzes [1965] bis zu einer geschlossenen RGLP-Polyederanalyse des RGLP-Zulässigkeitsbereichs. Mit "RGLP-Polyeder" ist dabei in bestimmter Sicht die konvexe Hülle der zulässigen ganzzahligen Punkte eines RGLP-Problems gemeint [1967; 1969].

Der Gedanke, gruppentheoretische Überlegungen bei der Untersuchung und Optimierung von RGLP-Problemen anzuwenden, wurde von verschiedenen Seiten aufgegriffen. So finden sich weitere Bausteine dieser Theorie bei FRANK [1967], GLOVER [1966; 1969], HU [1968; 1969], KORTANEK-JEROSLOW [1968], SHAPIRO [1968-1; 1968-2] und WHITE [1966].

Der gruppentheoretische Ansatz des RGLP-Problems ist nicht als ein spezielles Optimierungsverfahren anzusehen, sondern vielmehr zunächst einmal als eine Übersetzung der RGLP-Aufgabe in die Sprache der Gruppentheorie. Diese Problemtransformation bringt verschiedene Vorteile mit sich. An wichtiger Stelle ist hier zu nennen, daß die individuelle Struktur einer durch ihre Koeffizientenmatrix charakterisierten bestimmten GLP-Aufgabe herausgearbeitet wird, und die theoretische und algorithmische Problembehandlung auf diese spezielle Struktur ausge-

richtet ist. Damit wird z.B. der Rechenaufwand von Optimierungsverfahren, die auf Basis der gruppentheoretischen Überlegungen konzipiert werden können, weniger von der durch Variablen- und Nebenbedingungszahl bestimmten Größe eines GLP-Problems abhängig, als vielmehr von der in den Koeffizienten verankerten Problemstruktur.

Als weitere Vorteile sind zu erwähnen, daß sich Ganzzahligkeitsbedingungen gruppentheoretisch sehr konzentriert erfassen lassen und durch Standardsätze der Gruppentheorie in vielfältiger Weise manipulierbar sind. Deshalb bedeutet auch die gruppentheoretische Formulierung nicht, daß von vornherein damit eine bestimmte Klasse möglicher Optimierungsalgorithmen festgelegt ist. Vielmehr kann man durch erweiterte Einsichten in die Struktur von GLP-Problemen Hinweise gewinnen, welche einzelnen Merkmale derartige Optimierungsprozeduren aufweisen sollten, wobei der Gesamtrahmen eines Optimierungsverfahrens aber in keiner Weise eingegrenzt wird.

(c) Ziel und Gang der Untersuchung

Ziel der Arbeit ist eine gruppentheoretische Strukturanalyse des GGLP-Problems verbunden mit einer Untersuchung über einige algorithmische Anwendungsmöglichkeiten der dabei gewonnenen Ergebnisse. Für diese Betrachtungen ist z.T. eine Übernahme oder Übersetzung bereits vorliegender Ergebnisse der gruppentheoretischen RGLP-Untersuchung möglich. Bei der Lösung wichtiger Fragen der GGLP-Strukturanalyse und -optimierung tauchen jedoch Probleme auf, die für die RGLP-Aufgabe nicht gegeben sind.
Die weiteren Untersuchungen lassen sich wie folgt abstecken.

Nachdem unter 1. der Typ der betrachteten GGLP-Aufgabe definiert wurde, erfolgt im 2. Kapitel die Strukturanalyse des GGLP-Problems auf gruppentheoretischer Basis. Insbesondere ist hier die Faktorgruppe G_{BZ} der Reste der ganzzahligen LP-Basisvariablen des GGLP-Problems zu bestimmen und eine Transformation des nichtganzzahligen Nebenbasisteils in ein ganzzahliges Äquivalent durchzuführen.

Im 3. Kapitel wird das erarbeitete theoretische Instrumentarium verwandt, um Wege für Optimierungsalgorithmen aufzuzeigen. Einmal handelt es sich um eine Erweiterung des für den RGLP-Fall konzipierten "asymptotischen Algorithmus" von GOMORY auf GGLP-Aufgaben. Als zentralen Bestandteil enthält dieses Verfahren einen dynamischen Programmansatz zur Lösung eines Gruppenoptimierungsproblems. Zum zweiten werden Ansatzpunkte für eine Ausdehnung der Polyederanalyse von GOMORY auf den GGLP-Fall aufgezeigt. Die numerisch bestimmbaren Außenflächen dieses GGLP-Polyeders sind in gewissem Sinn strengste Schnittebenen.

Während der asymptotische Algorithmus sehr geeignet für parametrische Optimierung und Sensitivitätsanalysen in bezug auf die rechte Seite des GGLP-Problems ist, ermöglichen die aus der Polyederanalyse ableitbaren Schnittebenen direkt entsprechende Untersuchungen für die GGLP-Zielfunktion.

Zahlenbeispiele werden die allgemeinen Betrachtungen ergänzen.

Zur Erleichterung der Lesbarkeit wurde die Behandlung von Sonderproblemen, die an einigen Stellen der Arbeit einer Vertiefung und zusätzlichen ausführlichen Analyse der dort angeschnittenen Problemkreise dient, durch einzeilige Schrift von den übrigen Ausführungen abgesetzt. Diese Passagen können übersprungen werden, ohne daß dadurch das Verständnis der nachfolgenden Betrachtungen beeinträchtigt wird.

1. Typ des untersuchten gemischt-ganzzahligen linearen Programmierungsansatzes

(a) Ausgangsproblem

Der untersuchte Problemtyp wird durch folgenden GGLP-Ansatz charakterisiert:

$$(1)\quad \begin{aligned} &\bar{c}' \bar{x} \rightarrow \text{Max} \\ &A \bar{x} = \bar{b} \\ &\bar{x} \geq \bar{0} \\ &x_j \in Z \quad (j \in J_Z) \end{aligned}$$

Dabei soll von einer "ganzzahligen" Variablen x_j gesprochen werden, wenn für diese Komponente x_j des Variablenvektors $\bar{x}$ mit der Länge n Ganzzahligkeitsbedingungen gelten; die Indizes aller dieser ganzzahligen Variablen bilden die Indexmenge J_Z. Entsprechend heißen Variable x_j, für die keine Ganzzahligkeitsbedingungen vorgegeben sind, "nichtganzzahlige" oder "rationale" Variable; ihre Indizes sind Elemente der Indexmenge J_Q. Die weiteren Überlegungen haben für rein-ganzzahlige Probleme Gültigkeit, bei denen J_Q leer ist, wie auch - selbstverständlich - für den trivialen Fall, daß J_Z leer ist, mithin eine normale LP-Aufgabe vorliegt:

(2) $\bar{x}$	Variablenvektor der Länge n
$x_j (j \in J_Z)$	ganzzahlige Variable
$x_j (j \in J_Q)$	nichtganzzahlige, rationale Variable

Die Begriffsbildung "rationale" Variable deutet schon an, daß die Nichtganzzahligkeit auf den Bereich rationaler Zahlen eingegrenzt wird. Irrationale Zahlen als Werte für nichtganzzah-

lige Variable werden damit ausgeklammert. Dies hat seine Ursache in Ganzzahligkeitsanforderungen an den Koeffizientenvektor $\bar{b}$ und die Koeffizientenmatrix A, die sofort näher erläutert werden, und wie später deutlich wird, in einer Beschränkung der arithmetischen Operationen bei allen weiteren Ableitungen auf die vier Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Da der Quotientenkörper des Ringes der ganzen Zahlen der Körper der rationalen Zahlen ist, werden irrationale Zahlen gar nicht vorkommen. Inwieweit dadurch die praktische Anwendbarkeit der nachfolgenden Überlegungen und Ergebnisse beeinflußt wird, muß in enger Beziehung zu der Ganzzahligkeitsbedingung für A und $\bar{b}$ gesehen werden und wird deshalb in diesem Zusammenhang diskutiert.

(b) Eigenschaften des Ausgangsproblems

Die Koeffizientenmatrix A und die "rechte Seite" $\bar{b}$ von Problem (1) haben die folgenden Dimensionen und Eigenschaften:

(3) $A = ||a_{ij}||$ (m•n)-Matrix; alle a_{ij} ganzzahlig

$\bar{b}' = [b_1,\ldots,b_i,\ldots,b_m]$ m-Vektor; alle b_i ganzzahlig

Die Voraussetzung der Ganzzahligkeit von A und $\bar{b}$ scheint eine wesentliche Einschränkung in der Allgemeinheit der weiteren theoretischen Aussagen, vor allem aber auch in der praktischen Verwertbarkeit der Ergebnisse zu verursachen. Dieser Eindruck bestätigt sich in der zunächst zu vermutenden Strenge der Konsequenzen aber weder in theoretischer noch in praktischer Sicht.

Einmal lassen sich alle abbrechenden Dezimalzahlen durch Multiplikation mit einer entsprechenden Potenz der Basis 10 in ganze Zahlen übertragen. Daraus folgt, daß sich jede GGLP-Aufgabe, bei der von der praktischen Problemstellung her nichtganzzahlige Koeffizienten als abbrechende Dezimalbrüche vorgegeben sind, in eine äquivalente GGLP-Aufgabe des Typs (1) umformulieren läßt. Wenn z.B. für eine Gleichung i

$$(4)\quad \bar{a}_i^{*\prime}\ \bar{x} = b_i^*$$

die größte von Null verschiedene Dezimalstelle aller Sk[illegible] k beträgt, so wird aus dieser Gleichung eine Nebenbedingung in ganzzahligen Koeffizienten, wenn man sie mit 10^k erw[illegible]:

$$(6)\quad 10^k\ \bar{a}_i^{*\prime}\ \bar{x} = 10^k\ b_i^* .$$

Natürlich lassen sich auch Potenzen anderer Grundzahlen [illegible]men, sofern sie eine Erweiterung zur Ganzzahligkeit ermöglichen. Da man in dieser Weise mit allen Nebenbedingungen verfahren kann, läßt sich immer ein System des Typs (1) herstellen. Der theoretische Gültigkeitsbereich der weiteren Betrachtungen umfaßt also Problemstellungen mit abbrechenden Dezimalzahlen als Koeffizienten ohne Einschränkung. Für die Rechenpraxis ist zu beachten, daß der Erweiterung durch Konventionen für die Hardware-Darstellung von Festkommazahlen in EDV-Anlagen Grenzen gesetzt sind. Wenn man allerdings berücksichtigt, daß die obere Grenze der verarbeitbaren Festkommazahlen selten unter $2^{24} = 16.777.216$ zumeist aber weit darüber liegt, dürfte von daher für die praktische Anwendung kaum eine Einschränkung gegeben sein. Allerdings sind für Berechnungen Effizienzgesichtspunkte, gemessen an Rechenzeit und Speicherbedarf, zu beachten: bei den im weiteren vorgestell-

ten Algorithmen können die Zahl der notwendigen Rechenoperationen und der Speicherbedarf bei einer Erweiterung von Nebenbedingungen mit konstanten Faktoren steigen.

Wenn zum zweiten Daten als nichtabbrechende periodische oder nichtperiodische Dezimalzahlen vorliegen, so kann man sie durch Abbrechen bei einer bestimmten Dezimalstelle und eventuelles Runden als abbrechende Dezimalzahl annähern und entsprechend in ganzzahlige Koeffizienten überführen. Da es sich bei den nichtabbrechenden unperiodischen Zahlen nur um Dezimaldarstellungen irrationaler Zahlen handeln kann, sind diese insofern im weiteren mitberücksichtigt (MARTENSEN [1969, S. 2ff.]). Für den theoretischen Gültigkeitsbereich der folgenden Betrachtungen ist hervorzuheben, daß keine Annahmen gemacht werden, die dem angestrebten Genauigkeitsgrad bei dieser Annäherung Grenzen setzen. Eine allgemeine Untersuchung über die Näherungsfehler bei einer derartigen Umwandlung irrationaler in rationale GGLP-Aufgaben findet sich bei NOLTEMEIER [1970, insbes. S. 46f., 71 f.]. Für praktische Berechnungen gelten entsprechend die Anmerkungen, die eben zur Erweiterung abbrechender Dezimalzahlen gemacht wurden.

Schließlich besteht drittens noch die Möglichkeit, Daten, die als nichtganzzahlige rationale Zahlen vorliegen, nicht in Dezimalzahlform, sondern als Brüche mit ganzzahligem Zähler und Nenner darzustellen und zu verarbeiten, wie dies etwa in einem von GOMORY [1963, S. 292] erwähnten FORTRAN-Programm geschieht. Dieses Vorgehen steht in enger Beziehung zur Möglichkeit, Ganzzahligkeit durch Erweiterung ganzer Nebenbedingungen um konstante Faktoren zu erreichen: wenn in einer Nebenbedingung rationale Koeffizienten vorliegen, alle Koeffizienten auf einen Hauptnenner gebracht werden und dann nur

eine weitere Betrachtung der Zähler stattfindet, so handelt es sich um das, was oben mit "Erweiterung" bezeichnet wurde. Für die Menge zulässiger und optimaler Lösungen in System (1) ist die Berücksichtigung oder Vernachlässigung dieses Hauptnenners zwar unbeachtlich, für andere Informationen über Aufgabe (1) muß das aber nicht unbedingt sein. So kann z.B. für Schattenpreisbetrachtungen eine Veränderung der Einheiten in den Nebenbedingungen, die durch Erweiterung stattfindet, unerwünscht sein. Die weiteren Aussagen erfordern nur geringfügige Erweiterungen, wenn in dieser Weise Daten als Brüche mit ganzzahligen Zähler und Nenner weiterverarbeitet werden sollen; jedoch wird dieses Problem nicht mehr weiter verfolgt.

(c) Auflösung nach dem Basisteil

Die Formulierung der zugrundegelegten GGLP-Aufgabe (1) als Maximumproblem dient nur als Konvention. Alle im folgenden abgeleiteten Aussagen über Ganzzahligkeitsstrukturen gelten ohne Änderung unabhängig davon, ob (1) als Maximum- oder Minimumproblem aufgestellt wird. Da sich jedes Maximumproblem in bekannter Weise in ein äquivalentes Minimumproblem übertragen läßt und umgekehrt, wird dieser Problemkreis nicht weiter behandelt.

Die weiteren theoretischen und algorithmischen Überlegungen gehen davon aus, daß Problem (1) als übliche LP-Aufgabe ohne Beachtung von Ganzzahligkeitsbedingungen für die x_j $(j \in J_Z)$ gelöst ist.

Vor der dann einsetzenden Ganzzahligkeitsphase ist Aufgabe (1) also zunächst mit irgendeinem Verfahren zur Optimierung gewöhnlicher LP-Probleme zu lösen. Man erhält dadurch Kenntnis darüber, welche Variablen Basisvariable und welche Nebenbasisvariable in der optimalen LP-Basislösung sind. Den dazu notwendigen Umformulierungen von Aufgabe (1) und den im weiteren benötigten Vereinbarungen dienen die folgenden Ausführungen.

Nach Lösung des Problems (1) als LP-Aufgabe ohne Beachtung von Ganzzahligkeitsbedingungen läßt sich (1) umschreiben durch eine Aufspaltung in einen Basis- und Nebenbasisteil. Dabei sollen folgende Kurzzeichen gelten:

(6) $\bar{c}' = [\bar{c}'_B, \bar{c}'_N]$

$\bar{x}' = [\bar{x}'_B, \bar{x}'_N]$

$A = [B, N]$

J_B: = Indexmenge der LP-Basisvariablen

J_N: = Indexmenge der LP-Nebenbasisvariablen.

Mit B wird jeweils der Basisteil angesprochen, mit N entsprechend der Nebenbasisteil. Unter Beachtung einer durchgeführten Sortierung lautet das in den Basis- und Nebenbasisbereich aufgespaltene Problem (1):

$$
\begin{aligned}
(7)\quad & \bar{c}'_B\ \bar{x}_B + \bar{c}'_N\ \bar{x}_N \rightarrow \text{Max} \\
& B\ \bar{x}_B + N\ \bar{x}_N = \bar{b} \\
& \bar{x}_B \geq \bar{0} \\
& \bar{x}_N \geq \bar{0} \\
& x_j \in Z\ (j \in J_Z).
\end{aligned}
$$

Diese Aufgabe, aufgelöst nach dem Basisteil, ergibt:

$$(8)\quad \bar{c}_B' \; B^{-1} \; \bar{b} - \bar{c}_N'^{*} \; \bar{x}_N \rightarrow \text{Max}$$

$$\bar{x}_B = B^{-1} \; \bar{b} - B^{-1} \; N \; \bar{x}_N$$

$$\bar{x}_B \geq \bar{0}$$

$$\bar{x}_N \geq \bar{0}$$

$$x_j \in Z \; (j \in J_Z).$$

Die Komponenten von $\bar{c}_N^{*}$ sind die nach:

$$(9)\quad \bar{c}_N'^{*} = \bar{c}_B' \; B^{-1} \; N - \bar{c}_N'$$

umgerechneten Zielfunktions- Koeffizienten der Nebenbasisvariablen aus (1), wie sie etwa, bei Verwendung der Simplex-Methode, im optimalen Simplex-Tableau für Problem (1) ausgewiesen werden.

(d) Sortierung

Für allgemeine Probleme lassen sich keine Aussagen darüber machen, wie sich ganzzahlige und rationale Variable auf den Basis- und Nebenbasisteil der optimalen LP-Lösung aufteilen. Es kann sein, daß ein Teil der ganzzahligen und ein Teil der nichtganzzahligen Variablen in der Basis und die restlichen ganzzahligen und nichtganzzahligen Variablen Nebenbasisvariable sind. Es können aber auch die Fälle eintreten, daß

in der Basis nur ganzzahlige Variable sind oder daß alle ganzzahligen Variablen Nebenbasisvariable sind; in dieser letzten Konstellation ist das LP-Optimum zugleich Optimum für das GGLP-Problem. Um allen möglichen Kombinationen genügen zu können, werden die folgenden Vereinbarungen getroffen.

Aus Zweckmäßigkeitsgründen sind die Spalten $\bar{a}_j$ aus B immer derart zu sortieren, daß zuerst alle zu ganzzahligen Variablen und danach alle zu rationalen Variablen gehörigen Spalten angeführt sind. B wird entsprechend in B_Z und B_Q aufgeteilt. In gleicher Weise sind N_Z und N_Q zu bilden. Für die jeweiligen Spaltenindizes der Variablen werden die Indexmengen:

- J_{BZ}, J_{BQ}, J_{NZ} und J_{NQ}

eingeführt, für die Zahl der zugehörigen Variablen die Notation:

- $n_{BZ} := |J_{BZ}|$, $n_{BQ} := |J_{BQ}|$, $n_{NZ} := |J_{NZ}|$ und $n_{NQ} := |J_{NQ}|$

und schließlich die entsprechenden Teilvektoren von $\bar{x}$:

- $\bar{x}_{BZ}$, $\bar{x}_{BQ}$, $\bar{x}_{NZ}$ und $\bar{x}_{NQ}$.

Bei der Untersuchung der durch die LP-Basis vorgegebenen Ganzzahligkeitsbeschaffenheit wird eine weitere Aufgliederung von B notwendig:

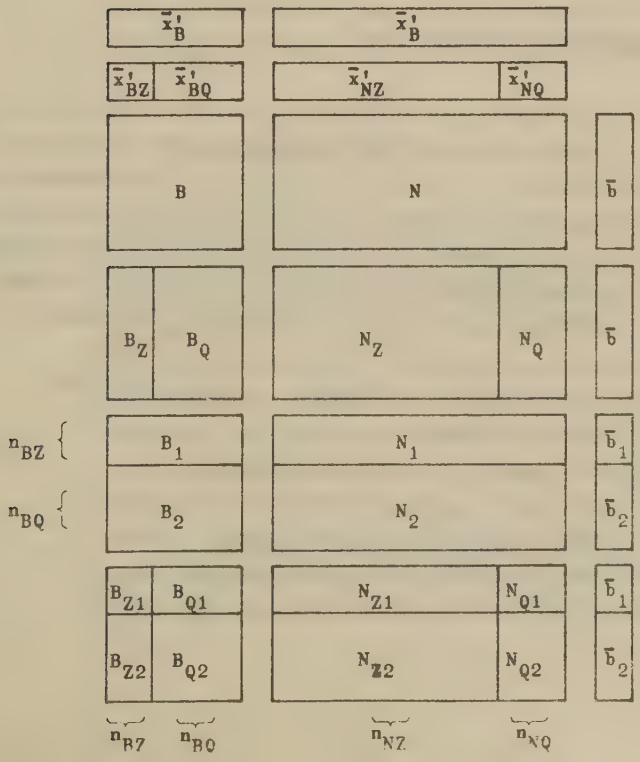
$$(10)\quad B = [B_Z, B_Q] = \begin{bmatrix} B_{Z1} & B_{Q1} \\ B_{Z2} & B_{Q2} \end{bmatrix}$$

In gleicher Weise soll die Inverse von B zerlegt werden in:

$$(11)\quad B^{-1} = \begin{bmatrix} B^*_{Z1} & B^*_{Q1} \\ B^*_{Z2} & B^*_{Q2} \end{bmatrix}$$

Entsprechende Aufgliederungen sind für N_Z, N_Q und $\bar{b}$ in n_{BZ} - zeilige obere Teile N_{Z1}, N_{Q1} und $\bar{b}_1$ und n_{BQ}-zeilige untere Teile N_{Z2}, N_{Q2} und $\bar{b}_2$ vorzunehmen.

Die zusammenfassende Veranschaulichung dieser Vereinbarungen in Tab. 1 erfolgt vor allem, um bei den späteren Transformationen die Positionen der abgeleiteten Teilmatrizen leichter erkennen zu können.



Tab.1: Positionsangaben vereinbarter Matrizen und ihre Dimensionen

(1 -e)

Problem (8) läßt sich unter Verwendung der vereinbarten Kurzzeichen jetzt umschreiben zu:

$$(12)\quad \bar{c}'_B \; B^{-1} \; \bar{b} - \bar{c}'^{*}_N \; \bar{x}_N \rightarrow \text{Max}$$

$$\bar{x}_{BZ} = [B^{*}_{Z1} \; , \; B^{*}_{Q1}] \; \bar{b} - [B^{*}_{Z1}, \; B^{*}_{Q1}] \; N \; \bar{x}_N$$

$$\bar{x}_{BQ} = [B^{*}_{Z2} \; , \; B^{*}_{Q2}] \; \bar{b} - [B^{*}_{Z2}, \; B^{*}_{Q2}] \; N \; \bar{x}_N$$

$$\bar{x}_{BZ} \geq \bar{0}, \; \bar{x}_{BQ} \geq \bar{0}, \; \bar{x}_N \geq \bar{0}$$

$$x_j \in Z \; (j \in J_Z).$$

(e) Endgültiges GGLP-Problem

Wenn man den konstanten Ausdruck in der Zielfunktion von (12), den Zielfunktionswert des LP-Optimums von (1), als für die Optimierung von (12) bedeutungslos wegläßt, das Problem durch Vorzeichentausch in der Zielfunktion in ein Minimumproblem umwandelt und weiterhin den Nebenbasisteil in einen ganzzahligen und einen nicht-ganzzahligen Teil aufgliedert, gelangt man zu Aufgabe (13) als Ziel der bisherigen Umformungen:

$$(13)\qquad \bar{c}'^{*}_{NZ} \; \bar{x}_{NZ} \; + \bar{c}'^{*}_{NQ} \; \bar{x}_{NQ} \rightarrow \text{Min}$$

$$(\alpha)\quad \bar{x}_{BZ} = [B^{*}_{Z1}, \; B^{*}_{Q1}] \; \bar{b} - [B^{*}_{Z1}, \; B^{*}_{Q1}] \; N_Z \; \bar{x}_{NZ}$$

$$- [B^{*}_{Z1}, \; B^{*}_{Q1}] \; N_Q \; \bar{x}_{NQ} \equiv \bar{0} \; (\text{mod } E)$$

$$(\beta)\quad \bar{x}_{BQ} = [B^*_{Z2},\ B^*_{Q2}]\,\bar{b} - [B^*_{Z2},\ B^*_{Q2}]\,N_Z\,\bar{x}_{NZ} - [B^*_{Z2},\ B^*_{Q2}]\,N_Q\,\bar{x}_{NQ}$$

$$(\gamma)\quad \bar{x}_{BZ} \geq \bar{0},\ \bar{x}_{BQ} \geq \bar{0}$$

$$(\delta)\quad \bar{x}_{NZ} \geq \bar{0},\ \bar{x}_{NQ} \geq \bar{0}\quad \bar{x}_{NZ} \in Z^{n_{NZ}}$$

Die Koeffizienten von Aufgabe (13) entsprechen unter Beachtung der durchgeführten Sortierung den Koeffizienten des optimalen Simplextableaus zu Aufgabe (1). Die Mengen zulässiger und optimaler Lösungen von (1) und (13) sind identisch. Das Optimierungsproblem (13) läßt sich jedoch in einer für die weiteren Betrachtungen sehr nützlichen Weise interpretieren, was bei (1) in dieser Anschaulichkeit nicht möglich ist.

(f) Interpretation GGLP-Problem

In (13) sind die Basisvariablen als abhängige Variable durch die freien Variablen, die Nebenbasisvariablen, ausgedrückt, die bei der LP-Optimierung üblicherweise Null gesetzt werden. Die Verletzung der Ganzzahligkeitsbedingung kann bei Betrachtung von Aufgabe (13) als normales LP-Problem demnach nur bei $\bar{x}_{BZ}$ geschehen. Diese Ganzzahligkeitsabweichungen bei $\bar{x}_{BZ}$, im weiteren wird auch von "Ganzzahligkeitsresten" oder einfach "Resten" gesprochen, können, wie aus (13) hervorgeht, allein durch die Rechteckmatrix $[B^*_{Z1},\ B^*_{Q1}]$ und nur durch sie erzeugt werden, da deren Koeffizienten im allgemeinen rational und nicht ganzzahlig sind. Bei Problemen spezieller Struktur kann $[B^*_{Z1},\ B^*_{Q1}]$ und damit die optimale LP-Lösung auch ganzzahlig

sein, wie etwa beim klassischen Transportproblem; im allgemeinen wird dies jedoch nicht der Fall sein. Auf diese Eigenschaften von B^{-1} kommen wir noch ausführlich zurück.

Das GGLP-Problem kann man nach Aufgabe (13) jetzt darin sehen, die freien Variablen $\bar{x}_{NZ}$ und $\bar{x}_{NQ}$ derart festzulegen, daß die über Linksmultiplikation mit $[B^*_{Z1}, B^*_{Q1}]$ erzeugten Ganzzahligkeitsreste die in der LP-Lösung vorhandenen Reste der ganzzahligen Variablen genau zu Verschwinden bringen. Dies wird durch die Kongruenzbedingung (13-α) ausgedrückt. Dabei dürfen entsprechend den Nichtnegativitätsbedingungen für die freien Variablen nichtnegative Werte nur in der Weise gewählt werden, daß die aktuelle Basis über (13-α) und (13-β) nichtnegativ wird. Außerdem ist nicht irgendein $\bar{x}_N$ gesucht, das Kongruenzbedingung und Nichtnegativitätsbedingungen erfüllt, sondern $\bar{x}_N$ ist unter Minimierung von $\bar{c}'^*_{NZ}\ \bar{x}_{NZ} + \bar{c}'^*_{NQ}\ \bar{x}_{NQ}$ zu bestimmen. Damit wird gefordert, daß die Verschlechterung des GGLP-Optimums gegenüber dem LP-Optimum, dem konstanten Ausdruck in der Zielfunktion von (12), möglichst gering ist. Es liegt auf der Hand, daß bei der Erzeugung ganzzahliger Basisvariablen eine Abweichung des GGLP-Zielfunktionswertes vom LP-Zielfunktionswert nur in Richtung einer Verschlechterung stattfinden kann. Deshalb wird zur einfacheren Charakterisierung der nichtnegativen Zielfunktionskoeffizienten des optimalen Simplex-Tableaus zum GGLP-Problem später häufig von "Kostenfaktoren" für diese Größen gesprochen und von der gesamten Zielfunktionsverschlechterung als von "Kosten".

Zur Terminologie sei weiter angemerkt, daß immer dann, wenn im weiteren Verlauf der Arbeit im Zusammenhang mit der GGLP-Optimierung von (LP-)Basisvariablen oder (LP-)Nebenbasisvariablen die Rede ist, die Aufgliederung aller Variablen des GGLP-Problems in der Lösung als LP-Problem gemäß (13) gemeint ist.

(g) Zahlenbeispiel

Allen weiteren Zahlenbeispielen der Arbeit, die zur Veranschaulichung theoretischer Aussagen oder zur Erläuterung algorithmischer Abläufe vorgetragen werden, liegt das im folgenden (Tab. 2) in Tableauform wiedergegebene Beispiel eines GGLP-Problems zugrunde; diese Formulierung entspricht der Aufgabe (1).

Jeder der eben unter (d) diskutierten Fälle ist in diesem Beispiel berücksichtigt, wie die bereits einer Sortierung unterzogene Variablenordnung zeigt; ganzzahlige und nichtganzzahlige Variable sind also sowohl im Basisteil als auch im Nebenbasisteil enthalten. Wie man sieht, lauten die Indexmengen:

(14) $J_{BZ} = \{1,2,3\}$ $J_{BQ} = \{4,5\}$

$J_{NZ} = \{6,7,8,9,10,11,12\}$ $J_{NQ} = \{13,14\}$

Das gleiche Problem, jetzt aufgelöst nach dem Basisteil entsprechend Aufgabe (13), hat die in Tab. 3 aufgeführten Koeffizienten.

Einer der im 3. Kapitel betrachteten Algorithmen hat in bezug auf die rechte Seite $\bar{b}$ eines GGLP-Problems parametrischen Charakter. Damit ist hier speziell gemeint, daß mit der Lösung der GGLP-Aufgabe für eine bestimmte rechte Seite $\bar{b}_1$ gleichzeitig die Lösung für beliebige andere rechte Seiten $\bar{b}_2$, $\bar{b}_3$,.... anfällt, für welche die Basislösung in einem noch näher zu erläuternden Sinne zulässig ist. Aus diesem Grunde enthalten Tab. 2 und Tab. 3 auch keine rechten Seiten.

x_{BZ}			x_{BO}		x_{NZ}							x_{NO}	
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
3	12	29	2	2	4	-8	1					9	4
8	27	48	-2	10	0	10		1				8	-29
9	28	66	4	8	-15	12			-1			18	29
2	9	25	2	2	9	-6				-1		8	10
5	19	45	2	6	20	0					1	1	7
290	1390	2550	-100	420	1500	-970	-	-	-	-	-	464	-2800

Tab. 2: Ausgangsdaten des GGLP-Beispiels gemaess Aufgabe (1-1)

1					-46.0000	8.3333	-1.3333	.6666	-.8333	-3.1666	-2.8333	-.3333	11.3333
	1				29.6666	-3.0000	1.6666	-.6666	.5000	3.8333	2.5000	.0000	-4.3333
		1			-12.0000	-.3333	-.6666	.3333	-.1666	-1.8333	-1.1666	.3333	2.0000
			1		43.9166	1.9166	2.0000	-1.3333	.4583	6.1250	4.2083	.5833	1.5833
				1	23.0833	4.4166	.1666	-.5000	.2083	2.2083	1.9583	-.4166	.7500
-	-	-	-	-	-40	-30	-100	-40	-70	-50	-80	-56	-70

Tab. 3: Ausgangsdaten des GGLP-Beispiels gemaess Aufgabe (1-13)

Um dem Zahlenbeispiel an dieser Stelle schon eine gewisse Vollständigkeit zu geben, sollen zwei der später untersuchten Vektoren $\bar{b}_j$ und die daraus resultierenden Werte der Basisvariablen im LP-Optimum (nach Tab. 2) aufgeführt werden:

$$(15)\quad \bar{b}_1 = \begin{bmatrix} 2254 \\ 3500 \\ 5244 \\ 1933 \\ 3460 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{x}_{B1} = B^{-1}\ \bar{b}_1 = \begin{bmatrix} 15,8333 \\ 41,5000 \\ 45,1666 \\ 159,0416 \\ 40,2916 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b}_6 = \begin{bmatrix} 2254 \\ 3502 \\ 5240 \\ 1933 \\ 3460 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{x}_{B6} = B^{-1}\ \bar{b}_6 = \begin{bmatrix} 13,8333 \\ 42,1666 \\ 45,1666 \\ 158,2083 \\ 40,1250 \end{bmatrix}$$

In beiden Fällen handelt es sich um zulässige LP-Lösungen, nicht aber um zulässige GGLP-Lösungen, da die ganzzahligen Variablen x_1, x_2 und x_3 nicht ganzzahlig sind.

2. Gruppentheoretische Strukturanalyse gemischt-ganzzahliger linearer Programmierungsansätze

21. Einführung

In diesem ersten Hauptteil der Arbeit wird eine gruppentheoretische Strukturanalyse des GGLP-Problems durchgeführt, die eine Erweiterung der RGLP-Untersuchungen von GOMORY [1969, Kap. 1] auf den GGLP-Fall darstellt.

In Kapitel 22 werden Grundlagen der Gruppen- und Gittertheorie diskutiert. Das gruppentheoretische Instrumentarium wird dabei insoweit vorgestellt, als es für das Verständnis der weiteren Ableitungen der Arbeit notwendig ist. Im Rahmen der gittertheoretischen Ausführungen werden einmal einige grundlegende Merkmale von Gittern diskutiert und zum anderen spezielle Verfahren zur Analyse der Teilbarkeitseigenschaften des GGLP-Problems vorgetragen, die für die weiteren Untersuchungen benötigt werden.

Im Kapitel 23 werden die Ganzzahligkeitsbedingungen des GGLP-Problems (1 -13) in eine Kongruenz umformuliert, auf deren Grundlage dann verschiedenartige Optimierungsansätze möglich sind. Diese Kongruenz wird aus einer speziellen Dekomposition der LP-Basis B des GGLP-Problems abgeleitet. Aus dieser Dekomposition kann man Informationen für eine Strukturierung der Koeffizientenmatrix der GGLP-Aufgabe gewinnen. Alle weiteren Untersuchungen gehen von diesem zweckmäßig transformierten GGLP-Problem aus. Die RGLP-Strukturierung von GOMORY zeigt sich als ein Spezialfall dieser GGLP-Strukturierung. Wie im RGLP-Problem wird sich ergeben, daß die zu eliminierenden Reste der ganzzahligen LP-Basisvariablen der GGLP-Aufgabe eine endliche Abel'sche Gruppe bilden.

Grundzüge eines ähnlichen Vorgehens wurden bei NASTANSKY [1970] vorgeschlagen.

Um die im Rahmen der gruppentheoretischen RGLP-Analyse gewonnenen Ergebnisse insbesondere im Hinblick auf die Konzeption von Optimierungsansätzen auf die GGLP-Optimierung übertragen zu können, sind für den nichtganzzahligen LP-Nebenbasisteil der GGLP-Aufgabe besondere Untersuchungen notwendig. Kapitel 24 beschäftigt sich mit diesem Problem, das für den RGLP-Fall nicht gegeben ist. Für diese Analyse des nichtganzzahligen Nebenbasisteils ist das gleiche theoretische Instrumentarium verwendbar, das schon für die Kongruenzbetrachtung in Kapitel 23 benutzt wurde. Es wird sich zeigen, daß die Reste der für GGLP-Ecklösungen in Frage kommenden Werte der nichtganzzahligen Nebenbasisvariablen einen endlichen Komplex K_{NQ} bilden. Über diesen ist es möglich, den nichtganzzahligen Nebenbasisteil in ein ganzzahliges Äquivalent zu transformieren und damit eine Vielzahl von Ergebnissen der RGLP-Untersuchung direkt auf das GGLP-Problem anwendbar zu machen.

Alle theoretischen Ableitungen werden jeweils am Zahlenbeispiel veranschaulicht.

22. Grundlagen der Gruppentheorie und der Gittertheorie

221. Gruppentheorie

(a) Grundbegriffe

An entscheidenden Stellen dieser Arbeit werden gruppentheoretische Überlegungen angewandt. Dieser Zweig der Mathematik kann im Rahmen der Mathematischen Programmierung nicht als selbstverständliches Instrument aufgefaßt werden. Deshalb soll zunächst auf Grundbegriffe der Gruppentheorie eingegangen

werden, soweit sie für die folgenden Betrachtungen notwendig sind; Definitionen und Terminologie folgen dabei v.d. WAERDEN [1966, Kap. 2].

Da diese allgemeinen Grundlagen in mathematischen Standardwerken ausführlich dargestellt werden und speziell für die hier angeschnittenen Fragestellungen z.B. bei SCHOLZ-SCHOENEBERG [1966, Kap. 1 und 2], wird hier nicht der allgemeine Charakter der grundlegenden Definitionen und Sätze hervorgehoben. Vielmehr sollen diese Grundlagen im Hinblick auf GGLP-Probleme präzisiert und an dem in der gesamten Arbeit verwandten Zahlenbeispiel veranschaulicht vorgetragen werden.

(1) Definition: Gruppe

Eine Gruppe G ist eine nichtleere Menge von Elementen, bei der die vier Bedingungen gegeben sind:

(α) Eine Zusammensetzungsvorschrift, zumeist "Produkt" genannt, ordnet jedem Elementpaar $a,b \in G$ ein drittes Element $c \in G$ zu, formal: $a \circ b = c$.

(β) Es gilt das Assoziativgesetz. Für $a,b,c \in G$ heißt dies: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

(γ) Es ist ein Einselement $e \in G$ vorhanden, das die Eigenschaft hat: $e \circ a = a$ (für alle $a \in G$).

(δ) Es existiert zu jedem $a \in G$ ein Inverses $a^{-1} \in G$, wobei gilt: $a^{-1} \circ a = e$.

Im weiteren werden nur Gruppen betrachtet, bei denen das kommutative Gesetz zusätzlich gilt:

(2) Definition: Abel'sche Gruppe

Eine Gruppe $\mathfrak{G}$, bei der außer den Bedingungen $(1_\alpha\text{-}5)$ für alle a, $b \in \mathfrak{G}$ noch gilt:

(ε) $a \circ b = b \circ a$,

wird Abel'sche Gruppe genannt.

$\mathfrak{G}_1$ ist ein Beispiel für eine Abel'sche Gruppe, die aus 18 Vektoren der Länge zwei besteht:

$$\mathfrak{G}_1 = \left\{ \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} \right\}.$$

Die Zusammensetzungsvorschrift dieser Gruppe ist die Addition modulo $\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 6\end{bmatrix}$. Diese Operation läßt sich z.B. dadurch realisieren, daß man eine "übliche" Addition ausführt und danach bei dem Summanden die erste Komponente durch den Rest ersetzt, der nicht mehr ganzzahlig durch 3 teilbar ist und entsprechend die zweite Komponente durch den ganzzahligen Divisionsrest bei Division durch 6 :

- "übliche" Addition: $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\12\end{bmatrix}$

- Addition mod $\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 6\end{bmatrix}$: $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$.

Bei dieser Zusammensetzung gelten Assoziativgesetz und Kommutativgesetz, wie man am Beispiel erkennt. "Einselement" von G_1 ist der Vektor $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, für den ersichtlich die Eigenschaft (1γ) gilt. Das "Inverse" zu einem Element $a \in G$ ist jenes Komplement a^{-1}, das a über die definierte Gruppenoperation zum Einselement ergänzt:

$$a_1 = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},\ a_1^{-1} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$a_2 = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix},\ a_2^{-1} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.$$

(3) Definition: Additive Gruppe oder Modul

Eine Gruppe, bei der die Zusammensetzungsvorschrift die Addition ist, heißt additive Gruppe oder Modul.
G_1 ist ein Beispiel für einen Modul.

(4) Je nachdem, ob die Menge der Elemente einer Gruppe endlich oder unendlich ist, spricht man von endlichen Gruppen oder unendlichen Gruppen. Die Zahl der Elemente $|G|$ einer endlichen Gruppe G wird Ordnung der Gruppe genannt.

Die Ordnung von G_1 ist $|G_1| = 18$; G_1 ist endlich. Ein Beispiel für eine unendliche Gruppe ist die Menge der ganzzahligen Vektoren der Länge m, bei der als Gruppenoperation die Addition erklärt ist.

(5) Definition: Untergruppe

Eine nichtleere Teilmenge G_u einer Gruppe G ist dann Untergruppe von G, wenn

(α) für $a, b \in G_u$ auch das Produkt $a \circ b = c \in G_u$ und

(β) für jedes $a \in G_u$ auch das Inverse $a^{-1} \in G_u$.

So sind z.B.:

$G_2 = \{[0_0], [0_3]\}$

$G_3 = \{[0_0], [0_1], [0_2], [0_3], [0_4], [0_5]\}$

$G_4 = \{[0_0], [1_0], [2_0]\}$

$G_5 = \{[0_0], [1_0], [2_0], [0_3], [1_3], [2_3]\}$

jeweils Untergruppen von G_1. Weiterhin ist etwa G_2 gleichzeitig auch Untergruppe von G_3 und G_5.

$\{[0_2], [1_2], [2_2]\}$ ist keine Untergruppe von G_1, da sowohl Bedingung (5α) als auch (5β) verletzt wird.

(6) Definition: Zyklische Gruppe

Eine Gruppe G heißt zyklisch, wenn alle ihre Elemente als Potenz eines einzigen Elementes darstellbar sind.

"Potenz" bedeutet, daß die Gruppenoperation laufend auf ein Element angewandt wird. Ein zyklischer Modul liegt also dann vor, wenn sich jedes Element als k-facher Summand ($k < |G|$) eines Elements der Gruppe ergibt.

(7) Die Ordnung des Elementes $a \in G$ ist die Ordnung der von a erzeugten zyklischen Gruppe. a selbst nennt man erzeugendes Element.

G_2, G_3, G_4 und G_5 sind zyklische Gruppen, G_1 dagegen nicht. $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ sind die einzigen erzeugenden Elemente von G_4, $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}$ die einzigen erzeugenden Elemente von G_3. $\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}$ erzeugen eine Untergruppe von G_3 mit der Ordnung 3. $\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$ hat dagegen nur die Ordnung 2, da es eine Untergruppe dieser Ordnung von G_3 erzeugt.

(8) Definition: Komplex

Ein Komplex K ist eine beliebige Menge von Elementen einer Gruppe G.

(9) Definition: Direktes Produkt, direkte Summe

Das direkte Produkt $K_1 \cdot K_2$ zweier Komplexe K_1, $K_2 \in G$ ist die Menge aller Produkte $a \cdot b$, wobei $a \in K_1$ und $b \in K_2$.
Lautet die Gruppenoperation Addition, so nennt man das direkte Produkt direkte Summe; als Operator verwendet man dafür das Zeichen $\oplus$.

Benötigt werden im weiteren häufig die direkten Summen spezieller Komplexe, nämlich von Untermoduln. G_1 ist z.B. darstellbar als direkte Summe der Untergruppen G_3 und G_4 : $G_3 \oplus G_4$.

Eigenschaften und grundlegende Aussagen über das direkte Produkt von Gruppen, speziell von Abel'schen, werden hier nicht allgemein diskutiert (siehe dazu z.B. BAUMGARTNER [1964, S. 67ff., S. 113ff.]), sondern später im Rahmen ihrer Anwendung erläutert.

(b) Restklassen

(10) Definition: Restklasse

Ist G_u eine Untergruppe von G und a ein Element von G, so ist $a \circ G_u$ eine Restklasse von G_u in G.

Restklassen haben im weiteren eine zentrale Bedeutung; sie sollen deshalb etwas näher erläutert werden.

Eine einfache Illustration ist die folgende: aus der Menge aller ganzen Zahlen, die als unendliche Gruppe mit der Gruppenoperation Addition aufgefaßt werden soll, sei die unendliche Untergruppe aller ganzzahligen Vielfachen von 6 herausgegriffen. Eine Restklasse dieser Untergruppe in der Gruppe aller ganzen Zahlen ist dann die Menge aller ganzen Zahlen, die bei Division durch 6 den gleichen Divisionsrest ergeben; z.B.:
Rest 1: ...,-11,-5,1,7,13,19,...
Rest 4: ...,-8,-2,4,10,16,22,...

Alle Restklassen, mit Ausnahme von G_u selbst - diese Restklasse entsteht durch $b \circ G_u$, $b \in G_u$ -, sind keine Gruppen, wie man an dem Beispiel sieht. Da jedes Element $a \in G$ nur einer Restklasse $a \circ G_u \subset G$ angehört, kann man a auch als Repräsentanten der Restklasse ansehen. Mithin kann jedes Element einer Restklasse als Repräsentant der Restklasse betrachtet werden.

Ein Beispiel für andere Restklassen ist das folgende. Wir definieren die beiden unendlichen Gruppen G_6 und G_7:

$$G_6 := \{\ldots, \begin{bmatrix}-6\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix}, \ldots\} \oplus$$

$$\{\ldots, \begin{bmatrix}0\\-12\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\12\end{bmatrix}, \ldots\}$$

G_7 := Gruppe aller 2-Vektoren mit ganzzahligen Komponenten,

in denen als Gruppenoperation die "normale" Addition erklärt ist.

Zu den Restklassen $K^1_{67} = a_1 \oplus G_6$ mit $a_1 = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \in G_7$ und $K^2_{67} = a_2 \oplus G_6$ mit $a_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \in G_7$ gehören z.B. die folgenden Elemente:

$$K^1_{67} : \begin{bmatrix}2\\-5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\13\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3002\\-599\end{bmatrix}$$

$$K^2_{67} : \begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-5\\17\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3002\\599\end{bmatrix}$$

Wie man sieht, ist die Differenz zweier beliebiger Elemente einer Restklasse immer Element der zugrunde gelegten Untergruppe. Umgekehrt gehören zwei Elemente aus G immer zu einer Restklasse von G_u in G, wenn ihre Differenz in G_u liegt.

(11) Mit <u>Index</u> j von G_u in G ist die Anzahl der verschiedenen Restklassen einer Untergruppe G_u in der Gruppe G gemeint. Der Index ergibt sich als Quotient der Ordnung von G und der Ordnung von G_u, sofern $|G|$ endlich ist:

$$j = \frac{|G|}{|G_u|}.$$

Z.B. sind der Index von $\mathfrak{G}_2$ in $\mathfrak{G}_3$ gleich 3 und der Index von $\mathfrak{G}_2$ in $\mathfrak{G}_1$ gleich 9. Der Index von $\mathfrak{G}_6$ in $\mathfrak{G}_7$ ist 18. An dieser Stelle sei schon darauf hingewiesen, daß gleichfalls $|\mathfrak{G}_1| = 18$ und weiter jede Restklasse von $\mathfrak{G}_6$ in $\mathfrak{G}_7$ in der Gruppe $\mathfrak{G}_1$ genau einen Repräsentanten hat.

(c) Isomorphismus und Homomorphismus

(12) Definition: Isomorphismus

Ein Isomorphismus μ zweier Gruppen $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}''$ ist eine eindeutige Abbildung von Elementen $a', b', c' \in \mathfrak{G}'$ auf Elemente $\mu a' = a'', \mu b' = b'', \mu c' = c'' \in \mathfrak{G}''$, bei der aus $a' \circ b' = c'$ immer folgt $a'' \circ b'' = c''$ und umgekehrt. $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}''$ heißen isomorph; man schreibt dafür $\mathfrak{G}' \cong \mathfrak{G}''$.

Für die Moduln $\mathfrak{G}_3$ und $\mathfrak{G}_5$ bestehen z.B. die beiden folgenden Isomorphismen μ_1 und μ_2:

$$\mu_1: \begin{array}{c} \mathfrak{G}_3 \\ \updownarrow \\ \mathfrak{G}_5 \end{array} = \begin{array}{c} \{[^0_0], [^0_1], [^0_2], [^0_3], [^0_4], [^0_5]\} \\ \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \\ \{[^0_0], [^2_3], [^1_0], [^0_3], [^2_0], [^1_3]\} \end{array}$$

$$\text{z.B.} \quad \begin{array}{ll} \mathfrak{G}_3 & [^0_1] + [^0_4] = [^0_5] \\ & \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \\ \mathfrak{G}_5 & [^2_3] + [^2_0] = [^1_3] \end{array}$$

*****

$$\mu_2: \begin{array}{c} \mathfrak{G}_3 \\ \updownarrow \\ \mathfrak{G}_5 \end{array} = \begin{array}{c} \{[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}0\\3\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}0\\4\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}0\\5\end{smallmatrix}]\} \\ \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \\ \{[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}0\\3\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}]\} \end{array}$$

$$\text{z.B. } \begin{array}{ll} \mathfrak{G}_3 & [\begin{smallmatrix}0\\3\end{smallmatrix}] + [\begin{smallmatrix}0\\4\end{smallmatrix}] = [\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}] \\ & \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \\ \mathfrak{G}_5 & [\begin{smallmatrix}0\\3\end{smallmatrix}] + [\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}] = [\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}] \end{array}$$

*****

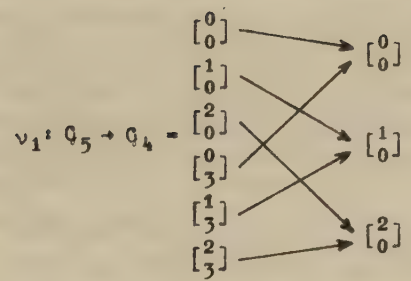
(13) Definition: Homomorphismus

Ein Homomorphismus ν einer Gruppe $\mathfrak{G}'$ in eine Gruppe $\mathfrak{G}''$ ist eine eindeutige Abbildung von Elementen a', b', c' $\in \mathfrak{G}'$ in Elemente $\nu a' = a''$, $\nu b' = b''$, $\nu c' = c'' \in \mathfrak{G}''$, bei der aus a'•b' = c' immer folgt a"•b" = c".
$\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}''$ heißen homomorph; man schreibt $\mathfrak{G}' \sim \mathfrak{G}''$.

Gegenüber dem Isomorhpismus gilt beim Homomorphismus die umgekehrte Richtung nicht: wenn für Bildelemente in $\mathfrak{G}''$ eine Gruppenbeziehung erfüllt ist, so folgt daraus nicht, daß für Urbildelemente aus $\mathfrak{G}'$ eine entsprechende Gruppenbeziehung gleichzeitig gilt.

Ein Isomorphismus ist immer ein Homomorphismus, während das Umgekehrte allgemein nicht gegeben ist.

Beispiele für Homomorphismen sind die beiden folgenden Abbildungen ν_1 und ν_2:



z.B. G_5 $\quad \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$

G_4 $\quad \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

G_5 $\quad \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$

aber

G_4 $\quad \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$

*****

$\nu_2 : G_7 \to G_1$ = Jede der 18 verschiedenen Restklassen von G_6 in G_7 wird auf das Element von G_1 abgebildet, das auch in der Restklasse selbst vertreten ist.

*****

ν_2 zeigt besonders deutlich den klassifizierenden Charakter eines Homomorphismus auf: die Gruppe G' ist dadurch in Klassen eingeteilt, daß man alle Urbildelemente aus G', denen ein bestimmtes Bildelement in G'' entspricht, zusammenfaßt.

Zwischen Bildelement und der zugehörigen Klasse von Urbildelementen, man nennt sie auch "Urbild", besteht eine eineindeutige Beziehung. Durch ν_2 werden solche Elemente aus G_7 zusammengefaßt, die bei einer komponentweisen Division durch 3 bzw. 6 den gleichen ganzzahligen Restvektor ergeben. ν_2 bewirkt mit anderen Worten, daß man aus der unendlichen Zahl unterscheidbarer 2-Vektoren in G_7 nur zwischen solchen differenziert, die unterschiedliche Reste ergeben. Wenn zwei Vektoren a', $b' \in G_7$ gemeinsam in eine bestimmte Restklasse von G_6 in G_7 fallen, so wird zwischen ihnen in G_1 nicht mehr unterschieden, da $\nu_2\, a' = \nu_2\, b'$.

Bei einem Gruppenhomomorphismus $\nu: G' \to G''$ ist eine der Restklassen in G' Untergruppe von G'. Und zwar handelt es sich um die Restklasse, die auf das Einselement von G'' abgebildet wird. In unserem Beispiel werden alle Vektoren $v = k_1 \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix}0\\6\end{bmatrix}$ $[k_i \in Z]$, mithin die Gruppe G_6 als Untergruppe von G_7, auf das Einselement $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \in G_1$ abgebildet. Allen ganzzahligen Vektoren also, die ohne Rest komponentweise durch 3 bzw 6 teilbar sind, entspricht in G_1 das Einselement.

Dieses letzte Beispiel $\nu_2: G_7 \to G_1$ wird in einem erweiterten Zusammenhang anhand einer Abbildung noch näher erläutert.

(14) Der Kern eines bestimmten Homomorphismus $\nu: G' \to G''$ ist bei Abel'schen Gruppen, nur solche werden - wie erwähnt - hier Anwendung finden, jene Untergruppe $G'_u \subset G'$, deren Elemente in das Einselement von G'' übergehen.

(d) Faktorgruppen

Anhand der bisherigen Veranschaulichung des Homomorphismus fällt es nun nicht schwer, das Problem zu lösen, ausgehend von einer Untergruppe $G'_u \subset G'$ eine zu G' homomorphe Gruppe G'' derart zu konstruieren, daß den Restklassen von G'_u in G' genau die Elemente von G'' entsprechen.

(15) Zu diesem Zweck werden die Restklassen selbst als Elemente der herzustellenden zu G' homomorphen Gruppe definiert. Es läßt sich zeigen, daß die Restklassen von G'_u in G' eine zu G' homomorphe Gruppe bilden. Diese Gruppe nennt man Faktorgruppe von G' nach G'_u. Man schreibt dafür G'/G'_u. Die Ordnung von G'/G'_u ist der Index von G'_u in G'.

Diese letzten Ergebnisse lassen sich in dem Satz zusammenfassen:

(16) Gegeben ein Homomorphismus $\nu: G' \to G''$ mit der Untergruppe $G'_u \subset G'$ als Kern des Homomorphismus. G'' ist dann isomorph der Faktorgruppe G'/G'_u .

Der oben schon untersuchte Beispiels-Homomorphismus ν_2 erscheint jetzt im folgenden Licht: wenn man für einen bestimmten Zweck aus der Gruppe aller ganzzahligen Vektoren G_7 nur solche unterscheiden will, die bei Division durch $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ einen unterschiedlichen Rest ergeben, kann man sich auf eine Betrachtung der Faktorgruppe G_7/G_6 beschränken. Eine dazu isomorphe Gruppe ist z.B. G_1. Eine weitere zu G_7/G_6 und damit auch zu G_1 isomorphe Gruppe ist etwa die Gruppe G_1^*, die aus G_1 dadurch entsteht, daß alle Vektorkomponenten der Elemente von G_1 durch 6 dividiert werden und als Gruppenoperation in G_1^* Addition mod $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ erklärt ist.

(17) Bei der Faktorgruppenbildung gibt es für Moduln einige spezielle Begriffe, die im weiteren benötigt werden.

Wenn in der Faktorgruppe G'/G'_u die beiden Gruppen Moduln sind, nennt man die Faktorgruppe Restklassenmodul von G' nach G'_u.

Die Restklassen $a \oplus G'_u (a \in G')$ heißen Restklassen modulo G'_u. G' wird nach G'_u faktorisiert.

Zwei Elemente $a, b \in G'$ heißen kongruent modulo G'_u, wenn sie in der gleichen Restklasse von G'_u in G' liegen; man schreibt dafür $a \equiv b \pmod{G'_u}$.

(e) Zusammenfassung

Der Begriff des Homomorphismus als im weiteren benötigtes Ergebnis der bisherigen gruppentheoretischen Ausführungen soll unter Verwendung des Zahlenbeispiels an Abb. 1 geometrisch zusammenfassend veranschaulicht werden.

Die auftretenden 2-Vektoren der Beispiels-Gruppen G_1 bis G_7 lassen sich als Punkte in dem durch a_1 für die erste Vektorkomponente und a_2 für die zweite Vektorkomponente aufgespannten Koordinatensystem darstellen.

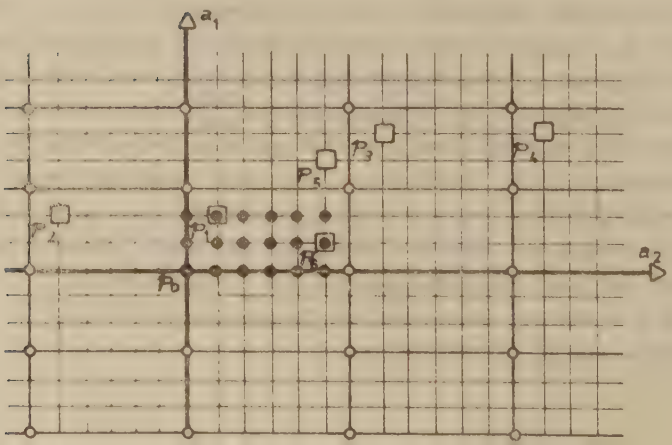


Abb. 1:
Gruppen, Untergruppen und Faktorgruppen

Der Gruppe G_7 entsprechen alle ganzzahligen Gitterpunkte des Koordinatensystems, der Gruppe G_6 alle mit " o " kenntlich gemachten Punkte und der Gruppe G_1 die durch " ● " hervorgehobenen Gitterpunkte.

Die Bildung der Faktorgruppe G_7/G_6 bewirkt eine Einteilung aller ganzzahligen Gitterpunkte in 18 Restklassen. Die Punkte p_1, p_2, p_3 und p_4 gehören z.B. zu einer Restklasse. Diese spezielle Restklasse enthält alle Vektoren, deren Ganzahligkeitsrest bei einer komponentweisen Division durch 3 bzw. 6 der Restvektor $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ ist. Diese Punkte sind kongruent modulo G_6; mit anderen Worten haben sie die gleiche Lage relativ zu dem durch G_6 gegebenen Gitter, ihre Differenz entspricht also immer einem der in diesem Gitter vorhandenen Punktabstände.

Die Gruppe G_1 ist isomorph der Faktorgruppe G_7/G_6. Der zugehörige Gruppenhomomorphismus $\nu_2 : G_7 \to G_1$ mit dem Kern G_6 bildet z.B. p_2, p_3 und p_4 auf p_1 und p_5 auf p_6 ab. Aus der Isomorphie $G_1 \cong G_7/G_6$ folgt:

In G_1 gilt:	p_1	+	p_6	=	p_0	
Damit gilt in G_7:	Irgendein Urbildpunkt von $p_1 \in G_1$ in G_7	+	Irgendein Urbildpunkt von $p_6 \in G_1$ in G_7	=	Irgendein Urbildpunkt aus $G_6 \subset G_7$	
z.B. gilt in G_7:	p_2	+	p_5	=	$\begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix}$	
	p_3	+	p_5	=	$\begin{bmatrix}9\\12\end{bmatrix}$	

Für eine solche Summierung gilt immer: wenn als ein Summand irgendein Element a aus einer Restklasse K_a gewählt wird und als zweiter Summand irgendein Element b aus einer Restklasse K_b, dann ist das Produkt a•b = c immer Element einer Restklasse K_c, wobei natürlich die Restklassen K_a, K_b, $K_c \subset \mathcal{G}$ bezüglich einer Untergruppe $\mathcal{G}_u \subset \mathcal{G}$ gebildet sind.

Im letzten Beispiel ist der Summand Gruppenelement einer speziellen Restklasse, nämlich von $\mathcal{G}_6$, dem Kern des Homomorphismus $\mathcal{G}_2$. Wenn man Elemente der beiden Restklassen $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \oplus \mathcal{G}_6$ und $\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix} \oplus \mathcal{G}_6$ addiert, erhält man als resultierendes Gruppenelement also immer ein Element, das durch $\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 6\end{bmatrix}$ teilbar ist.

Speziell dieses Problem, aus Elementen verschiedener Restklassen ein Element des Kerns des zugrundeliegenden Homomorphismus zu konstruieren, wird uns im weiteren noch näher beschäftigen. Für diese Untersuchungen spielen nur die speziellen Teilbarkeitseigenschaften von Vektoren in bezug auf vorgegebene Teiler eine Rolle. Es ist dabei nicht notwendig zwischen den einer Restklasse zugehörigen Vektoren zu unterscheiden. Auf das Beispiel bezogen, läßt sich dazu an dieser Stelle festhalten: sofern es bei Vektoren nur auf die Information über ihre relative Lage zum dem durch $\mathcal{G}_6$ gebildeten Gitter ankommt, also auf ihre Reste bezüglich 3 bzw. 6, kann man sich auf die Betrachtung der zur Gruppe $\mathcal{G}_1$ gehörigen 18 Vektoren beschränken, die alle diese Informationen beinhalten.

222. Gittertheorie

(a) Gitter

Im m-dimensionalen Vektorraum Q^m aller rationalen m-Vektoren bilden die ganzzahligen Vektoren ein Gitter Z^m. Eine ganzzahlige Basis dieses Gitters in bezug auf ganzzahlige Linearfaktoren ist die (m.m)-Einheitsmatrix E, denn alle Vektoren $\bar{z} \in Z^m$ lassen sich durch ganzzahlige Linearkombinationen der Spalten aus E darstellen: $\bar{z} = E\,\bar{x}$ $(\bar{x} \in Z^m)$.

Wir werden im weiteren Eigenschaften von Gittern und Gitterbasen untersuchen. Dabei sollen die Gitter aus ganzzahligen m-Vektoren $\bar{z}$ und die (m•r) Gitterbasen B aus ganzzahligen Koeffizienten mit r linear unabhängigen Spalten $(m \geq r)$ bestehen. Weiterhin werden die Gitterpunkte $\bar{z}$ bezüglich der Gitterbasis B durch ganzzahlige Vektoren $\bar{x}$ dargestellt: $\bar{z} = B\,\bar{x}$ $(\bar{z} \in Z^m,\ \bar{x} \in Z^r)$.

Da jedes Gitter eine Basis besitzt, bei der diese Eigenschaft gegeben ist (WEYL [1966, S. 136]), können wir ein Gitter durch die zugrundeliegende Gitterbasis definieren, wenn wir als Linearfaktoren beliebige $\bar{x} \in Z^r$ zulassen. Wir werden dafür schreiben: G (Basis). Das o.a. Gitter Z^m ließe sich also in dieser Terminologie durch G(E) festlegen.

Ein weiteres Gitter in Q^m ist z.B. G(B), das auf der oben definierten Basis B aufbaut. G(B) ist ein Untergitter von G(E), d.h. G(B) ist Gitter und alle Gitterpunkte von G(B) sind auch gleichzeitig Punkte von G(E). G(E) ist ein m-dimensionales Gitter, da es m linear unabhängige Vektoren enthält; entsprechend ist G(B) r-dimensional.

(b) Unimodularität der Gitterbasiswechsel

Im weiteren werden Beziehungen zwischen Gittern und deren Untergittern anhand der Beziehungen zwischen den zugeordneten Gitterbasen untersucht. Dazu ist es notwendig, vorerst den Mechanismus von Basiswechseln in einem Gitter zu beschreiben.

Betrachten wir zu diesem Zweck das Gitter G(B). In diesem Gitter sei neben der Basis B noch eine weitere Basis B* bekannt.

(1) Satz: Unimodularität von Gitterbasiswechseln

Zwei beliebige Gitterbasen desselben Gitters sind durch unimodulare Transformationen miteinander verbunden.

Das heißt:
$B^* = B\,P$ und $B = B^*\,P^{-1}$,
wobei P und P^{-1} ganzzahlige (r.r)-Matrizen sind mit:
$\det P = \pm 1$ und $\det P^{-1} = \pm 1$.

*****

Dies bedeutet, daß beliebige Transformationen und Rücktransformationen unter Gitterbasen eines bestimmten Gitters immer durch in Z invertierbare Matrizen mit der Determinante ± 1 durchführbar sind. Derartige Matrizen bezeichnet man als unimodular (z.B. WEYL [1966, S. 137]), die Umwandlungen entsprechend als unimodulare Transformationen.

Die Konstruktion verschiedener Gitterbasen B_1, B_2, B_3,... kann ausgehend von einer bekannten Gitterbasis B_0 des Gitters $G(B_0)$ nach den zwei Regeln erfolgen:

(2-α) Vertauschungen der Spalten von B_0 sind zulässig.

(2-β) Jede Spalte $\bar{b}_j$ aus B_0 darf ersetzt werden durch $\bar{b}_j + k\,\bar{b}_h$, wobei $j \neq h$ und $k \in Z$.

Die sukzessive Anwendung dieser Regeln bestimmt eindeutig die zugehörige Transformation P und es gilt:

$$G(B_o) = G(B_1) = G(B_2) = \ldots\ldots$$

$$G(B_o) = G(B_o\,P_1) = G(B_o\,P_2) = \ldots\ldots$$

Ein <u>Zahlenbeispiel</u> verdeutlicht die einzelnen Umformungsschritte und deren Zusammenfassung in der unimodularen Transformation P bzw. Rücktransformation P^{-1}:

B_o	B_1	B_2	B_3
$\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 3 & -4 \\ 2 & 16 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -14 \\ 3 & -28 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 15 & -14 \\ 31 & -28 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -14 & 15 \\ -28 & 31 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -8 & 9 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
P_o	P_1	P_2	P_3

In entsprechender Weise wie B wurde jeweils P umgeformt. Wie sich leicht nachvollziehen läßt, gilt für die vier verschiedenen Gitterbasen B_o, B_1, B_2 und B_3 von $G(B_o)$: $B_i = B_o\ P_i$ $(i = 0,1,2,3)$. Da z.B.:

$$P_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 9 \end{bmatrix},$$

gilt für diese Rücktransformation ersichtlich:

$$B_o = B_2\ P_2^{-1}.$$

(c) Elementarteilersatz

Ein in den weiteren Betrachtungen oft angewandter Satz, der es ermöglicht, algorithmisch verwendbare Informationen über die Resteigenschaften der zu eliminierenden Ganzzahligkeitsreste nach Aufgabe (1 -13) zu gewinnen, lautet (vgl. dazu v.d. WAERDEN [1967, S. 3ff.]):

(4) Satz: Elementarteiler

G_u sei ein r-dimensionales Untergitter des t-dimensionalen Gitters G. Es existieren eine (t.r)-Diagonalmatrix S, eine (m.r)-Basis B^*_u von G_u und eine (m.t)-Basis B* von G, so daß:

$$B^*_u = B^* S.$$

S besitzt dabei die Diagonalform:

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & & \\ \cdot & 0 & \ddots & s_r \\ \cdot & \cdot & & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

wobei die s_i Elementarteiler heißen, die ganzzahlig sind und die Teilbarkeitseigenschaften haben:

$$s_i \equiv 0 \pmod{s_{i-1}} \qquad (i = 2,3,\ldots,r)$$

*****

Die Bedeutung von "Elementarteiler" im Namen dieses Satzes wird weiter unten, Abschnitt (e) und insbesondere Abschnitt (h), deutlich.

Dieser Satz besagt u.a., soviel sei an dieser Stelle schon erwähnt, daß wir für G und G_u derartige Basen B* und B^*_u finden können, daß die r Spalten von B^*_u jeweils s_i-fache Vielfache (i = 1,...,r) der entsprechenden ersten r Spalten von B* sind. Die Basen B* und B^*_u sind also im Verhältnis zueinander in bestimmter Weise strukturiert. Diese Strukturierung läßt sich algorithmisch in vielfältiger Weise ausnutzen, wie später noch gezeigt wird.

(d) Umwandlungsregeln für unimodulare Transformationen von Rechteckmatrizen

Hier soll zunächst das Problem weiter verfolgt werden, in welcher Weise man ausgehend von beliebigen Basen des Gitters G und seines Untergitters G_u derartig strukturierte Basen herstellen kann. Dazu betrachten wir allgemein ein Gitter G(B) und dessen Untergitter $G(B_u)$. Zwischen den Basen dieser beiden Gitter bestehe die Beziehung:

(5) $B_u = B\,C$.

Diese ganzzahligen Matrizen haben die Dimensionen:
B_u : m·r, B : m·t und deshalb C : t·r mit $r \leq t \leq m$.

Aus C läßt sich nun die oben definierte Diagonalmatrix S ableiten, indem man in systematischer Weise in G(B) und $G(B_u)$

Basiswechsel durchführt. Das dabei benutzte Iterationsverfahren wendet schrittweise die beiden Regeln (2) auf B_u oder B an, wobei bei jedem Umwandlungsschritt C entsprechend transformiert wird, so daß für jede Zwischenstufe eine Beziehung der Form:

(6) $\bar{B}_u = \bar{B}\ \bar{C}$

erfüllt ist.

Da man die Informationen für die notwendigen unimodularen Basiswechsel jeweils aus dem aktuellen $\bar{C}$ erhält, werden die mit den Basiswechseln in G(B) und $G(B_u)$ korrespondierenden Umwandlungen innerhalb von C zunächst herausgestellt.

Bei C sind folgende Umwandlungen zulässig (vgl. z.B. v.d. WAERDEN [1967, S. 4 ff.], GRÖBNER [1966, S. 187 ff.]):

(7-α) Die Vertauschung zweier Zeilen von C entspricht einer Vertauschung zweier Spalten von B.
Entsprechend korrespondiert Spaltenwechsel in C mit der Vertauschung zweier Spalten in B_u.

(7-ß) Ersetze die i-te Zeile $\bar{c}'_i$ von C durch $\bar{c}'_i + k\ \bar{c}'_g$ mit $i \neq g$ und $k \in Z$.
Dies korrespondiert mit der Spaltenersetzung $\bar{b}_g := \bar{b}_g - k\ \bar{b}_i$ in B.

(7-γ) Ersetze die j-te Spalte $\bar{c}_j$ von C durch $\bar{c}_j + k\ \bar{c}_h$ mit $j \neq h$ und $k \in Z$.
Entsprechend ist in B_u die Spaltensubstitution $\bar{b}_{u_j} := \bar{b}_{u_j} + k\ \bar{b}_{u_h}$ vorzunehmen.

Die schrittweise Anwendung dieser drei Regeln auf die Matrizengleichung (5) $B_u = B\ C$ garantiert, daß sich immer Systeme der Art (6) $\bar{B}_u = \bar{B}\ \bar{C}$ ergeben, wobei $G(\bar{B}_u) = G(B_u)$ und $G(\bar{B}) = G(B)$.

(e) SMITH'sche Normalform

Die verbleibende Frage ist jetzt die, in welcher Abfolge diese Regeln angewendet werden sollen, damit aus C die Diagonalform S abgeleitet wird, und entsprechend im Endergebnis für die Basen von G(B) und $G(B_u)$ nach (4) die Beziehung gilt:

(8) $B_u^* = B^*\ C^* = B^*\ S$

und für die Elemente s_i der Diagonale von S die geforderten Teilbarkeitseigenschaften erfüllt sind. Es handelt sich hier um das Problem der Bestimmung der Elementarteiler von C, denn die oben unter (4) eingeführten Größen s_i sind als Elementarteiler einer Matrix im Rahmen der Linearen Algebra bekannt. Die Elementarteilergestalt S einer Matrix wird auch als "SMITH'sche Normalform" bezeichnet (HU [1969, S. 377]).

Für die Ableitung der Elementarteiler einer ganzzahligen Matrix C existieren Standardalgorithmen (vgl. etwa v.d. WAERDEN [1967, S. 4-5]).

Diese basieren im Prinzip auf Sortieroperationen innerhalb von C nach Regel (7-α) und einer laufenden Anwendung des Euklid'schen Algorithmus zur Bestimmung des GGT zweier Zahlen, der dann zur Ermittlung der k für die Spalten- und Zeilenoperatio-

nen in C nach den Regeln (7-ß,γ) führt. Für RGLP-Aufgaben hat HU [1968, Wiederabdruck: 1969, Anhang A] das Standardverfahren zur Herstellung der SMITH'schen Normalform dadurch verbessert, daß er ausgehend von C durch sukzessive Bestimmung ($i = 1,2,\ldots$) des GGT von Spalte und Zeile i aus C zunächst als Zwischenstufe eine Diagonalform $\bar{C}$ ableitet und daraus dann $C^* = S$ bestimmt. Im weiteren sollen Interpretation und Konvergenzbeweis für diesen Algorithmus nicht wiederholt werden. Da das HU'sche Verfahren jedoch für den RGLP-Fall konzipiert wurde, bei dem die Matrix C immer quadratisch mit Rang m ist, sind auch für dieses Verfahren, wie für die bereits durchgeführte Interpretation von Basiswechseln in Gittern und deren Untergittern, beim GGLP-Problem Verallgemeinerungen notwendig. Diese Verallgemeinerungen - hier nur unwesentliche Änderungen gegenüber dem RGLP-Fall - sollen anhand einer entsprechenden Abwandlung der sechs Schritte, in denen der Algorithmus von HU beschrieben wurde, durchgeführt werden. Dabei werden gleichzeitig geringfügige Änderungen vorgenommen, die allerdings nicht wegen der Umformulierung für GGLP-Probleme notwendig sind.

(f) HU'scher Algorithmus zur Elementarteilerableitung

Aufgabe ist die Elementarteilerbestimmung der ganzzahligen (t.r)-Matrix $C = \|c_{ij}\|$ mit $r \leq t$. Die Zeilen von C sind die Vektoren $\bar{c}'_i$ ($i = 1,\ldots,t$) und die Spalten entsprechend $\bar{c}_j$ ($j = 1,\ldots,r$). Das aktuelle C soll jeweils in der ersten Phase mit C' [Schritte (I) bis (V)], dann in der Diagonalform mit $\bar{C}$ [Schritte (VI) bis (VIII)] bezeichnet werden.

Algorithmus (1): Elementarteilerbestimmung

Schritt I: Wiederhole die Schritte (II) bis (V), für $u = 1,2,\ldots,r$. Nach der r-ten Wiederholung hat C' Diagonalform; geh dann nach Schritt (VI).

Schritt II: Tausche Spalten und Zeilen in C' derart aus, daß c_{uu} das absolut kleinste Nicht-Nullelement unter allen Koeffizienten in Zeile u und Spalte u ist.

Schritt III: Wenn alle c_{uj} $(j = u,u+1,\ldots,r)$ durch c_{uu} teilbar sind, geh nach Schritt (IV).

Andernfalls: c_{uk} sei nicht durch c_{uu} teilbar. Dividiere c_{uk} durch c_{uu} und spalte den ganzzahligen Rest ab gemäß:

$$c_{uk} = n\, c_{uu} + q,$$

wobei n eine ganze Zahl ist und q der ganzzahlige Rest mit $0 < q < c_{uu}$.

Ersetze die k-te Spalte:

$$\bar{c}_k := \bar{c}_k - n\, \bar{c}_u$$

(Anm.: Insbesondere gilt für c_{uk} nach der Ersetzung $c_{uk} = q < c_{uu}$).

Geh nach Schritt (II).

Schritt IV: Wenn alle c_{iu} $(i = u,u+1,\ldots,t)$ durch c_{uu} teilbar sind, geh nach Schritt (V).

Andernfalls: c_{ku} sei nicht durch c_{uu} teilbar. Dividiere c_{ku} durch c_{uu} und spalte den ganzzahligen Rest ab gemäß:

$$c_{ku} = n\, c_{uu} + q,$$

wobei n eine ganze Zahl ist und q der ganzzahlige Rest mit $0 < q < c_{uu}$.

Ersetze die k-te Zeile

$$\bar{c}'_k := \bar{c}'_k - n\, \bar{c}'_n .$$

(Anm.: Insbesondere gilt für c_{ku} nach der Ersetzung $c_{ku} = q < c_{uu}$).

Geh nach Schritt (II).

Schritt (V): c_{uu} teilt jetzt sowohl alle Elemente der u-ten Zeile als auch alle Elemente der u-ten Spalte.

Überführe alle Elemente c_{uk} $(k = u+1,\ldots,r)$ der u-ten Zeile in Nullelemente durch die Ersetzung:

$$\bar{c}_k := \bar{c}_k - n\ \bar{c}_u \qquad (k = u+1,\ldots,r),$$

wobei $n = c_{uk}/c_{uu}$.

Überführe alle Elemente c_{ku} $(k = u+1,\ldots,t)$ der u-ten Spalte in Nullelemente durch die Ersetzung:

$$\bar{c}'_k := \bar{c}'_k - n\ \bar{c}'_u \qquad (k = u+1,\ldots,t),$$

wobei $n = c_{ku}/c_{uu}$.

(Anm.: Durch die Schritte (I) bis (V) wird C sukzessiv in eine Diagonalmatrix überführt:

$$\begin{bmatrix} c'_{11} & 0\ldots0 \\ 0 & c'_{22}\cdots c'_{2r} \\ \vdots & \vdots\ \ \vdots \\ 0 & c'_{t2}\cdots c'_{tr} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} c''_{11} & & \\ & c''_{22} & 0 \\ & & c''_{ii}\cdots c''_{ir} \\ & 0 & \vdots\ \ \vdots \\ & & c''_{ti}\cdots c''_{tr} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} c''_{11} & & \\ & c''_{22} & 0 \\ & & \ddots \\ 0 & & c''_{rr} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Dabei sind: $c'_{11} = c''_{11} = c'''_{11}$, $c''_{22} = c'''_{22}$, usw.

Geh nach Schritt (VI).

Schritt VI: Wiederhole Schritte VII und VIII für u = 1,2,...,r. Nach der r-ten Wiederholung ist S aus $\tilde{C}$ abgeleitet und ENDE.

Schritt VII: Tausche Spalten und Zeilen in der Diagonalform $\tilde{C}$ derart aus, daß c_{uu} das absolut kleinste Nicht-Nullelement unter allen Elementen c_{ii} (i = u,u+1,...,r) der Hauptdiagonalen ist.

Schritt (VIII): Wenn alle c_{ii} (i = u+1,...,r) durch c_{uu} teilbar sind, geh nach Schritt (VI).

Andernfalls: Die weiteren Operationen laufen alle in einer (2,2)-Matrix ab. c_{kk} sei nicht durch c_{uu} teilbar. Dividiere c_{kk} durch c_{uu} und spalte den ganzzahligen Rest ab gemäß:

$$c_{kk} = n\, c_{uu} + q,$$

wobei n eine ganze Zahl ist und q der ganzzahlige Rest mit:

$$0 < q < c_{uu}.$$

Durch die im weiteren wiedergegebene Abfolge von zulässigen Operationen nach Regel (7) bringen wir in dem betrachteten (2,2)-Ausschnitt aus $\tilde{C}$ den ganzzahligen Divisionsrest q von c_{kk}/c_{uu} in die (1,1)-Position:

$$\underset{-1-}{\begin{bmatrix} c_{uu} & 0 \\ 0 & nc_{uu}+q \end{bmatrix}} \underset{-2-}{\begin{bmatrix} c_{uu} & 0 \\ nc_{uu} & nc_{uu}+q \end{bmatrix}} \underset{-3-}{\begin{bmatrix} c_{uu} & -c_{uu} \\ nc_{uu} & q \end{bmatrix}} \underset{-4-}{\begin{bmatrix} q & nc_{uu} \\ -c_{uu} & c_{uu} \end{bmatrix}}$$

Wende auf die letzte dieser (2.2)-Matrizen unter entsprechender Anpassung Schritte (III) bis (V) an.
Geht nach Schritt (VIII).

***** Ende Algorithmus (1).

HU nimmt zu seinem Algorithmus eine Abschätzung der Maximalzahl notwendiger Rechenoperationen vor [1969, S. 380-381]. Die dabei ermittelten Formeln gelten entsprechend auch für die hier beschriebene Anwendung des Verfahrens auf GGLP-Probleme, bei denen allgemein Elementarteiler von (t.r)-Rechteckmatrizen C in der eben definierten Form zu bestimmen sind. Bei der Übertragung dieser Formeln auf Rechteckmatrizen ist zweierlei zu beachten:

(α) Die Zahl der Operationen in den Zeilen von C wird durch r, die in den Spalten durch t bestimmt.

(ß) Bei quadratischen Matrizen C können alle Operationen mod K_q mit $K_q = |\det C|$ ablaufen. Dazu sind alle Elemente c_{ij} von C vor Beginn des Algorithmus durch die ihnen mod K_q kongruenten Elemente $\hat{c}_{ij} := c_{ij} \bmod K_q$ zu ersetzen. Wenn diese Substitution vorgenommen wurde, läßt sich eine obere Schranke für die Maximalzahl notwendiger Operationen jetzt in $\hat{C} = \|\hat{c}_{ij}\|$ angeben, da $|\det C| = |\det \hat{C}|$ als entscheidende Größe in diese Berechnung eingeht (HU [1969, S. 380-381]).

Da bei rechteckigen Matrizen die Determinante undefiniert ist, ist K_q zu ersetzen durch:

K_r := GGT aller r-reihigen Unterdeterminanten von C. Entsprechend kann vor Durchführung des Algorithmus zur Ableitung der Elementarteiler eine Substitution der Elemente c_{ij} durch $\hat{c}_{ij} := c_{ij} \bmod K_r$ vorgenommen werden und die Rechenoperationen können mod K_r ablaufen. Die Maximalzahl dieser Operationen ist jetzt durch K_r bestimmt. K_r ist gleich dem Produkt aller Elementarteiler von C bzw. $\hat{C}$:

$$K_r = \prod_{i=1,\ldots,r} s_i$$

auf diese Beziehung werden wir später noch zurückkommen [Abschnitt (h)].

Im übrigen ist nur anzumerken, daß der Algorithmus in gleicher Weise für den RGLP-Fall arbeitet, wobei dann t = r, da der Rechenablauf unabhängig von der Gestalt der zugrundeliegenden Matrizen ist. Weiterhin ist C auch dann quadratisch, wenn in der optimalen LP-Basislösung des GGLP-Problems (zufällig) nur ganzzahlige Variable sind.

(g) Darstellung der Elementarteilerableitung durch Links- und Rechtsmultiplikation

Die Elementarteilerableitung aus C durch die schrittweise Anwendung der Regel (7), z.B. nach dem HU'schen Algorithmus, läßt sich durch laufende Basiswechsel in einem Gitter und dessen Untergitter beschreiben, wie wir schon gesehen haben [siehe Abschnitt (d)]. Aus dieser Interpretation kann man die

nützliche Beziehung ableiten, daß die Überführung von C in die Elementarteilerform C* = S durch Links- und Rechtsmultiplikation von C mit unimodularen Matrizen P und Q zusammenfaßbar ist. P und Q beschreiben dabei die Basiswechsel in dem zugrundeliegenden Gitter und Untergitter.

Ausgangspunkt der Überlegungen ist Gleichung (5), welche die Beziehungen zwischen Gitterbasis, Untergitterbasis und C widerspiegelt:

(5) $B_u = B \; C.$

Mit dem Abschluß der Transformation von C in S sind, den einzelnen Umwandlungsschritten folgend, in eindeutiger Weise neue Gitterbasen B* in G(B) bzw. B_u^* in $G(B_u)$ festgelegt. Dies drückt Gleichung (8) aus:

(8) $B_u^* = B^* \; C^* = B^* \; S.$

Wenn wir die unimodulare Transformation, durch die B* aus B entsteht, mit P^{-1} definieren:

(9) $B^* = B \; P^{-1}$ oder $B = B^* \; P$

und die Transformation von B_u in B_u^* entsprechend durch Q:

(10) $B_u^* = B_u \; Q$ oder $B_u = B_u^* \; Q^{-1}$,

dann ergibt sich für die Umwandlung von C in C*:

(11) $B_u = B\ C$

$B^*_u\ Q^{-1} = B^*\ P\ C$

$B^*_u = B^*\ P\ C\ Q$

Aus der letzten Beziehung folgt mit (8), daß :

(12) $C^* = S = P\ C\ Q$;

mithin folgt aus dem Elementarteilersatz die Existenz zweier unimodularer Matrizen P und Q, die rechteckige ganzzahlige Matrizen in ihre Elementarteilerform überführen können. Die Matrizen C und C* werden, wie alle Matrizen, die sich durch unimodulare Transformationen ineinander überführen lassen, unimodular äquivalent genannt.

Vor allem die Transformation P wird später benötigt, um Vektoren, die bezüglich einer Ausgangsbasis B des Hauptgitters dargestellt sind, in die Koordinaten zu überführen, die ihren bei Wahl der neuen Basis B* im Zuge einer Elementarteilerableitung entsprechen. P erhält man numerisch, indem man in analoger Weise wie bei Beispiel (3) bei allen Zeilenoperationen in C eine Einheitsmatrix mit umrechnet:

(13) $C \rightarrow C^* \Rightarrow E \rightarrow P$.

Durch die Schrittabfolge in Algorithmus (1) werden zwar eindeutig Transformationen P und Q und damit neue Gitterbasen B* und B^*_u festgelegt. Da aber die Schrittabfolge nicht eindeutig ist, weil sich etwa bei den verschiedenen Prüfungen auf kleinste absolute Größe der Koeffizienten zufällig mehrere

Elemente feststellen lassen, die aktuell eine gleiche kleinste absolute Größe besitzen, können sich unterschiedliche P und Q ergeben.

Dieses Problem wollen wir hier nicht weiter verfolgen, da wir durch Algorithmus (1) mit Sicherheit in der Lage sind, eines dieser möglichen unimodularen Matrizenpaare P und Q zu identifizieren und dies für die weiteren Untersuchungen hinreichend ist.

(h) Elementarteiler und Determinantenteiler

Die Elementarteiler einer ganzzahligen (t·r)-Matrix C spiegeln deren Teilbarkeitseigenschaften wieder. Was damit u.a. gemeint sein kann, wird deutlich, wenn wir die Elementarteiler s_i $(i = 1,\ldots,r)$ dieser Matrix zu den ihnen eindeutig zugeordneten Determinantenteilern σ_i $(i = 1,\ldots,r)$ in Beziehung setzen.

Ausgehend von den Elementarteilern kann man die Determinantenteiler definieren durch:

$$(14)\quad \sigma_i := \prod_{j=1,\ldots,i} s_i \qquad (i = 1,2,\ldots,r)$$

Umgekehrt ergeben sich dann die Elementarteiler aus den Determinantenteilern als der Quotient zweier aufeinanderfolgender Determinantenteiler:

$$(15)\quad s_1 = \sigma_1,\ s_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1},\ \ldots,\ s_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_{r-1}}.$$

Auch die Determinantenteiler haben also entsprechende Teilbarkeitseigenschaften wie die Elementarteiler [siehe Satz (4)].

Die Determinantenteiler haben nun folgende Bedeutung: allgemein gibt der i-te Determinantenteiler σ_i (i = 1,...,r) einer Matrix C den GGT aller i-reihigen Unterdeterminanten von C an (vgl. z.B. GRÖBNER [1966, S. 187]). So ist etwa $s_1 = \sigma_1$ der GGT aller Elemente von C.

Weiterhin ist z.B.:

$$(16)\quad \sigma_r = \prod_{i=1,\ldots,r} s_i = |\det C|,$$

wenn C eine quadratische (r.r)-Matrix mit Rang r ist.

Alle Elementarteiler s_i und Determinantenteiler σ_i (i = 1,...,r) unimodular äquivalenter ganzzahliger (t.r)-Matrizen sind einander gleich. Dies wird an den Algorithmen zur Ableitung der Elementarteiler aus einer Matrix C besonders deutlich: derartige Algorithmen basieren ja darauf, fortlaufend unimodular äquivalente Matrizen $C = C_0, C_1, C_2, \ldots$ abzuleiten, bis schließlich eine Matrix $C^* = S$ erreicht ist, aus der die Elementarteiler direkt ersichtlich sind.

(i) Teilbarkeitseigenschaften

Der Begriff "Teilbarkeitseigenschaften" soll am Beispiel einer quadratischen Matrix weiter konkretisiert werden. Im oben definierten Ausgangsproblem (1 -13) der in dieser Arbeit untersuchten Klasse von GGLP-Aufgaben waren die Ganzzahligkeitsabweichungen der Basisvariablen im LP-Optimum allein

durch B^{-1}, die Inverse der optimalen LP-Basis B, bestimmt, da die rechte Seite $\bar{b}$ des Problems (1 -1) voraussetzungsgemäß ganzzahlig ist. Hier in diesem Zusammenhang wird nur die folgende Frage untersucht: Gegeben sei eine Basis B. Die Koeffizienten der Inversen B^{-1} sind im allgemeinen nicht ganzzahlig, aber als Quotienten mit ganzzahligem Zähler und Nenner darstellbar. Wie groß ist die Zahl unterschiedlicher Reste und damit Ganzzahligkeitsabweichungen, die maximal bei der Basisvariablen $\bar{x}_B = B^{-1}\bar{b}$ aufgrund des vorgegebenen B bei variablem beliebigen $\bar{b}$ auftreten können?

Für die Beantwortung dieser Frage ist es zweckmäßig, die Invertierung einer Matrix C als Lösung einer Abfolge von Gleichungssystemen zu sehen:

$$(17)\quad \begin{aligned} C\,\bar{x}_1 &= \bar{e}_1 \\ &\vdots \\ C\,\bar{x}_r &= \bar{e}_r \end{aligned}$$

Dabei ist $\bar{e}_r$ der r-te Einheitsvektor und $C^{-1} = [\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_r]$.

Betrachten wir die Lösung des Systems $C\,\bar{x}_1 = \bar{e}_1$. Nach bekannten Sätzen (vgl. z.B. GRÖBNER [1966, S. 45-47]) ergeben sich die einzelnen Komponenten x_{1j} $(j = 1,\ldots,r)$ des Lösungsvektors $\bar{x}_1$ als die Quotienten:

$$(18)\quad x_{11} = \frac{\det\,[\bar{e}_1,\ \bar{c}_2,\ldots,\bar{c}_r]}{\det C}$$

$$x_{1j} = \frac{\det\,[\bar{c}_1,\ldots,\bar{c}_{j-1},\ \bar{e}_1,\ \bar{c}_{j+1},\ldots,\bar{c}_r]}{\det C}$$

$$x_{1r} = \frac{\det\,[\bar{c}_1,\ldots,\bar{c}_{r-1},\ \bar{e}_1]}{\det C}$$

Am Beispiel der Zählerdeterminante für x_{11}:

$$(19)\quad \det\left[\bar{e}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_r\right] = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1r} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} \\ & & & \\ 0 & c_{r2} & \cdots & c_{rr} \end{bmatrix}$$

sieht man deutlich, daß die Zählerdeterminanten in (18) mit ihrem Absolutwert jeweils die Adjunkten der Elemente der ersten Zeile sind.

Am Determinantenquotienten für das allgemeine Element x_{ij} aus C^{-1}:

$$(20)\quad x_{ij} = \frac{\det\left[\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_{j-1}, \bar{e}_i, \bar{c}_{j+1}, \ldots, \bar{c}_r\right]}{\det C} \qquad (i,j = 1,\ldots,r)$$

wird jetzt ersichtlich, daß die Menge der Absolutwerte aller Zählerdeterminanten identisch ist mit der Menge der Absolutwerte aller (r-1)-reihigen Unterdeterminanten von C. Der kleinste ganzzahlige Nenner k, auf den sich <u>alle</u> Koeffizienten von C^{-1} bringen lassen, ist also:

$$(21)\quad k = \frac{\text{GGT aller (r-1)-reihigen Unterdeterminanten von C}}{|\det C|}$$

Der Zähler des Ausdrucks (21) ist aber nichts anderes als der (r-1)-te Determinantenteiler σ_{r-1} von C, wie eben festgestellt wurde. Unter Verwendung von (16) und (15) wird aus (21):

$$(22)\quad k = \frac{\sigma_{r-1}}{|\det C|} = \frac{\sigma_{r-1}}{\sigma_r} = \frac{1}{s_r}\,.$$

Die Antwort auf die oben gestellte Frage lautet also:

(23) Satz: Ganzzahligkeitsreste der LP-Koeffizienten

Die Zahl unterschiedlicher Ganzzahligkeitsreste, die bei den Basisvariablen eines LP-Problems bei einer (r.r)-LP-Basis B und alternativen $\bar{b}$ maximal auftreten kann, ist gleich dem Elementarteiler s_r von B. Mögliche Bruchteile sind:

$$0/s_r,\ 1/s_r,\ 2/s_r,\ldots,s_r-1/s_r.$$

*****

In ähnlicher Weise erlauben neben s_r auch die anderen Elementarteiler s_i (und die Determinantenteiler σ_i) für $i = 1,2,\ldots,r-1$ Aussagen über Teilbarkeitseigenschaften. Auf ihrer Grundlage läßt sich z.B. untersuchen, inwieweit Teilbarkeitssymmetrien gegeben sind, wenn man nicht alle Elemente einer Matrix zugleich betrachtet, sondern sich nur auf einen Teil der Elemente beschränkt, So können etwa die Elementarteiler angeben, daß die Elemente einer Zeile in der Inversen einer LP-Basis B^{-1} kleinere Hauptnenner haben als die Gesamtheit aller Elemente der Matrix. Dieser kleinere Hauptnenner teilt natürlich $\sigma_r = |\det C|$. Für die den Zeilen über $B^{-1}\bar{b}$ zuordnenbaren Werte der Basisvariablen folgt daraus, daß die Zahl der Ganzzahligkeitsreste, die bei ihnen möglich ist, geringer ist als die in (23) angesprochene Maximalzahl möglicher Ganzzahligkeitsreste.

Diese Interpretationen sollen hier nicht weiter verfolgt werden. Auf andere Eigenschaften der Reste kommen wir später (232-g) noch zurück.

(j) Zahlenbeispiel

Ein Zahlenbeispiel soll die Elementarteilerableitung und ihre Äquivalenz in Gitterbasenwechseln verdeutlichen.

Wir betrachten das Gitter $G(B) = G(E^3)$ mit der Ausgangsbasis:

$$B = E^r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ein Untergitter von G(B) ist $G(B_u)$ mit der Basis:

$$B_u = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 3 & -4 \\ 2 & 16 \end{bmatrix} .$$

Diese Basen stehen in der einfachen Beziehung:

(5') $B_u = B \cdot C$

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 3 & -4 \\ 2 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 3 & -4 \\ 2 & 16 \end{bmatrix}$$

zueinander.

Bei der Elementarteilerableitung aus C werden im weiteren gleichzeitig zwei Einheitsmatrizen $E^3 = P_0$ und $E^2 = Q_0$ mit umgerechnet. Diese entsprechen am Ende der Ableitung den Matrizen P und Q, durch die sowohl die Basiswechsel in G(B) [P] und in $G(B_u)$ [Q] beschrieben werden als auch die vollständige Transformation von C in C* = S nach (12) C* = P C Q.

Bei Zeilenoperationen in C ist im folgenden in gleicher Weise P umzurechnen, bei Spaltenoperationen entsprechend Q. Die Umformungen sind in Tab. 4 wiedergegeben.

Stufe				Umwandlungsschritt
0	$\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}$	$\begin{matrix}1&-6\\3&-4\\2&16\end{matrix}$	$\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}$	Z2 := Z2 - 3 Z1 Z3 := Z3 - 2 Z1
	$P_o=E^3$	$C_o=C$	$Q_o=E^3$	
1	$\begin{matrix}1&0&0\\-3&1&0\\-2&0&1\end{matrix}$	$\begin{matrix}1&-6\\0&14\\0&28\end{matrix}$	$\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}$	S2 := S2 + 6 S1
	P_1	C_1	Q_1	
2	$\begin{matrix}1&0&0\\-3&1&1\\-2&0&1\end{matrix}$	$\begin{matrix}1&0\\0&14\\0&28\end{matrix}$	$\begin{matrix}1&6\\0&1\end{matrix}$	Z3 := Z3 - 2 Z2
	P_2	C_2	Q_2	
3	$\begin{matrix}1&0&0\\-3&1&0\\4&-2&1\end{matrix}$	$\begin{matrix}1&0\\0&14\\0&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}1&6\\0&1\end{matrix}$	(Zi : Zeile i Sj : Spalte j)
	$P = P_3$	$C^*=S=C_3$	$Q = Q_3$	

Tab. 4: Elementarteilerbestimmung

Die Gitterbasen, die der Enstufe der Ableitung - hier Stufe 3 - entsprechen, sind nach (9) und (10):

$$(9') \quad B^* = B \; P^{-1} = E \; P^{-1} = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(10') \quad B_u^* = B_u \; Q = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 3 & -4 \\ 2 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 14 \\ 2 & 28 \end{bmatrix}$$

Wie man sieht, gilt für die neuen Gitterbasen B^* und B_u^* die Beziehung (4):

$$(8') \quad B_u^* = B^* \cdot S$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 14 \\ 2 & 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 14 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Insbesondere ist z.B. die erste Spalte von B_u^* das $s_1 = 1$-fache Vielfache der ersten Spalte von B^*, entsprechend die zweite Spalte von B_u^* das $s_2 = 14$-fache Vielfache der zweiten Spalte von B^*. Weiterhin ist etwa der GGT aller Elemente von C nach Abschnitt (h) : $s_1 = \sigma_1 = 1$. Entsprechend ist der GGT aller 2-zeiligen Unterdeterminanten $\sigma_2 = s_1 \cdot s_2 = 14$, wie man leicht nachprüfen kann.

Nach System (12) heißt es für $C^* = S$:

(222-j)

$$(12') \quad C^* = S = P\,C\,Q$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 3 & -4 \\ 2 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 14 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 14 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

23. Ganzzahligkeitsbedingung für ganzzahlige Basisvariable als Kongruenz

231. Strukturierung der Koeffizientenmatrix durch Dekomposition von B

(a) Problemstellung

Das im letzten Kapitel erarbeitete Instrumentarium wird jetzt verwandt, um die Koeffizientenmatrix des allgemeinen GGLP-Problems in Formulierung (1 -1) bzw. in der nach dem LP-Basisteil aufgelösten Form (1 -13) zu strukturieren. Die dabei gewonnenen Informationen können zum Aufbau von Lösungsalgorithmen verwandt werden, wie im 3. Kapitel der Arbeit gezeigt wird.

Bei dieser Strukturierung werden, dargestellt am GGLP-Problem (1 -1), die Nebenbedingungskoeffizienten in eine bestimmte symmetrische Form durch eine unimodulare Transformation P gebracht:

$$A\ \bar{x} = [B,N]\ \bar{x} = \bar{b} \xrightarrow{P} P\ A\ \bar{x} = [P\ B,\ P\ N]\ \bar{x} = P\ \bar{b}$$

$$= [\underline{B},\ \underline{N}]\ \bar{x} \qquad = \underline{\bar{b}}$$

Die Idee eines derartigen Vorgehens stammt von GOMORY, der als erster auf der Basis einer solchen strukturierenden Transformation für den RGLP-Fall Lösungsverfahren vorschlug [1965]. Im Rahmen des im weiteren dargestellten Verfahrens für das GGLP-Problem stellt der GOMORY-Ansatz einen Spezifalfall dar, auf den wir noch zurückkommen werden.

Wir gehen hier vom GGLP-Problem (1 -1) aus, das aber in der bereits sortierten Form (1 -7) zugrundegelegt werden soll, bei der die Kenntnis der optimalen LP-Basis von (1 -1) vorausgesetzt wird. Die Strukturierung von A = [B,N], die vor allem in einer speziellen Dekomposition von B besteht, wird zunächst durch die stufenweise Durchführung von Gitterbasiswechseln beschrieben. Im Anschluß daran wird die aus den gesamten Basiswechseln resultierende Transformation von A = [B,N], insbesondere die von B, erläutert.

(b) Ausgangspunkt der Strukturierung

Die Koeffizientenspalten $\bar{a}_j$ von A sind im Gitter Z^m definiert: $\bar{a}_j \in Z^m$. Eine Basis dieses Gitters ist die (m.m)-Einheitsmatrix E. Trivialerweise kann man sich die Vektoren $\bar{a}_j$ bezüglich dieser Basis identisch dargestellt denken:

(1) $\bar{a}_j = E \quad \bar{a}_j$.

Die im weiteren geschilderten unimodularen Transformationen ändern die Gitterbasis von Z^m ab gemäß:

(2) $E \quad \overset{P^{-1}}{\rightarrow} \quad \bar{E} = P^{-1}$.

Da wir von der identischen Darstellung ausgingen, lauten die Koordinaten der Vektoren $\bar{a}_j$ bezüglich der neuen Basis in Z^m einfach:

(3) $\bar{a}_j = P^{-1} \quad \bar{a}_j$, $\bar{a}_j = P \quad \bar{a}_j$.

Ein Untergitter in $Z^m = G(E)$ wird durch $G(B_Z)$ definiert. In diesem n_{BZ}-dimensionalen Gitter müssen in der optimalen GGLP-Lösung alle Vektoren $B_Z \; \bar{x}_{BZ}$ liegen, da $\bar{x}_{BZ}$ ganzzahlig sein muß. Neben einem Gitterbasiswechsel in $G(E)$ werden wir im weiteren auch Gitterbasiswechsel in $G(B_Z)$ durchführen.

Wir erhalten in der oben (222-d) ausführlich diskutierten Weise bei dieser Umwandlung laufend Gleichungssysteme der Art:

$$(4)\quad \bar{B}_Z = \bar{E} \quad \bar{C}.$$

Da wir jedoch die Informationen für die gewünschte Strukturierung des GGLP-Problems aus der gesamten LP-Basis $B = [B_Z, B_Q]$ ziehen müssen, ist es zweckmäßig, bei der Gitterbasisumrechnung gleichzeitig B_Q mit umzuwandeln. Für die Beschreibung der Beziehungen zwischen den sukzessiv abgeleiteten Gitterbasen werden wir deshalb nicht das System (4) nehmen, sondern ein um B_Q erweitertes System, das in seiner Ausgangsform lautet:

$$(5)\quad [B_Z, B_Q] = E[B_Z, B_Q].$$

Hervorzuheben ist hier, daß wir nicht das "ganzzahlige Gitter" $G([B_Z, B_Q])$ betrachten; dieses ist gar nicht definiert, da die Vektoren $B_Q \; \bar{x}_{BQ} \in Q^{n_{BQ}}$. Vielmehr dient (5) nur der einfacheren Handhabung der Gitterbasenumwandlung; die aktuellen Gitterbasen für $G(E)$ und $G(B_Z)$ gehen dabei aus (5) jeweils - neben anderen Informationen - eindeutig hervor.

Die Systeme der Art (5) werden wir im weiteren jeweils in einer ausführlicheren Schreibweise als in (5) wiedergeben. Die Dimensionen der Teilmatrizen entsprechen dabei genau den in Tab. 1 festgelegten Dimensionen. Jede der im weiteren auftretenden quadratischen Gesamtmatrizen ist regulär, da die LP-Basis B immer den Rang m besitzen muß. Das Ausgangssystem (5) lautet in der Aufspaltung:

$$(6)\quad \begin{bmatrix} B_{Z1} & B_{Q1} \\ B_{Z2} & B_{Q2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{Z1} & 0 \\ 0 & E_{Q1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{Z1} & C_{Q1} \\ C_{Z2} & C_{Q2} \end{bmatrix}$$

Da wir im Obergitter mit der Einheitsmatrix als Basis beginnen, gilt in (6) : C = B.

(c) Algorithmus zur Strukturierung

Algorithmus (2): Strukturierung der Koeffizientenmatrix im GGLP-Problem

Schritt (I):

Auf $\begin{bmatrix} C_{Q1} \\ C_{Q2} \end{bmatrix}$ sind die Schritte (I) bis (V) des HU'schen Algorithmus zur Elementarteilerableitung anzuwenden [Algorithmus (1)]. Das Ergebnis dieser Ableitung ist die $(n_{BQ} \cdot n_{BQ})$-Diagonalmatrix $\bar{C}_{Q2}$.

Schritte (I) bis (V) sind derart anzuwenden, daß $\bar{C}_{Q2} \neq 0$ wird und in der Q1-Position des abgeleiteten $\bar{C}$ die 0-Matrix steht :

$$\begin{bmatrix} C_{Q1} \\ C_{Q2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{C}_{Q2} \end{bmatrix}$$

Allgemein werden bei dieser Berechnung in allen Zeilen von C Zeilenoperationen notwendig werden. Die Gitterbasis von G(E) wird sich also in jeder der vier unterschiedenen Teilmatrizen ändern.

Da die Spaltenoperationen innerhalb C dagegen nur im Q-Teil stattfinden, ist auch B entsprechend nur im Q-Teil anzupassen; B_Z bleibt dagegen unverändert.

Nach der Durchführung des 1. Schritts lautet das aktuelle Gleichungssystem:

$$(7) \quad \begin{bmatrix} B_{Z1} & \bar{B}_{Q1} \\ B_{Z2} & \bar{B}_{Q2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{Z1} & \bar{E}_{Q1} \\ \bar{E}_{Z2} & \bar{E}_{Q2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{C}_{Z1} & 0 \\ \bar{C}_{Z2} & \bar{C}_{Q2} \end{bmatrix}$$

<u>Schritt (II):</u>

$\bar{C}_{Z1}$ wird in die Elementarteilerform überführt.

Zeilenoperationen sind jetzt nur im oberen Teil von C_{Z1} notwendig. Entsprechend werden sich nur $[\bar{E}_{Z1}, \bar{E}_{Q1}]$ ändern können, nicht aber $[\bar{E}_{Z2}, \bar{E}_{Q2}]$. In diesem zweiten Schritt wird jetzt auch die Gitterbasis von $G(B_Z)$ verändert, da Spaltenoperationen im Z-Teil von C durchzuführen sind; gegenüber Schritt (I) bleibt jetzt dagegen der Q-Teil von B der gleiche.

Das abgeleitete System als Ziel der Umwandlungen lautet jetzt:

$$(8)\quad \begin{bmatrix} \bar{B}_{Z1} & \bar{B}_{Q1} \\ \bar{B}_{Z2} & \bar{B}_{Q2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{Z1} & \bar{E}_{Q1} \\ \bar{E}_{Z2} & \bar{E}_{Q2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{C}_{Z1} & 0 \\ \bar{C}_{Z2} & \bar{C}_{Q2} \end{bmatrix}$$

***** Ende Algorithmus (2).

Es sei an dieser Stelle nur darauf hingewiesen, daß im RGLP-Fall wie auch dann, wenn in der optimalen LP-Basislösung eines GGLP-Problems nur ganzzahlige Variable sind, von Algorithmus (2) nur Schritt (II) angewandt wird. Nähere Untersuchungen dazu folgen weiter unten.

(d) Unimodularität der Strukturierung

Die gesamte Umformung beschreiben die unimodularen Transformationen P und Q:

$$(9)\qquad \begin{array}{ccccc} & B & = & E & \cdot & C & (6') \\ Q & \downarrow & & \downarrow P^{-1} & & & \\ & = & & = & & = & \\ & B & = & E & \cdot & C & (8') \end{array}$$

Da die Ausgangsbasis von G(E) die Einheitsmatrix war, gilt:

$$(10)\quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{Z1} & \bar{E}_{Q1} \\ \bar{E}_{Z2} & \bar{E}_{Q2} \end{bmatrix}, \quad P: = \begin{bmatrix} \bar{E}^{*}_{Z1} & \bar{E}^{*}_{Q1} \\ \bar{E}^{*}_{Z2} & \bar{E}^{*}_{Q2} \end{bmatrix}$$

Alle Transformationen sind unimodular. Deshalb sind die Matrix P^{-1} wie auch deren Inverse P ganzzahlig mit $|\det P| = |\det P^{-1}| = 1$.

Für Q gilt das folgende: Im ersten Schritt finden Spaltenoperationen nur im Q-Teil statt. Wenn man Q, ausgehend von der Einheitsmatrix:

$$(11)\quad Q^* = \begin{bmatrix} E_{Z1} & 0 \\ 0 & E_{Q2} \end{bmatrix}$$

laufend mit umrechnet, so hat Q* nach Durchführung des 1. Schritts $Q^* \to Q^{**}$ die folgende Form:

$$(12)\quad Q^{**} = \begin{bmatrix} E_{Z1} & 0 \\ 0 & Q^{**}_{Q2} \end{bmatrix} .$$

Da im Schritt (II) Spaltenoperationen allein innerhalb des Z-Teils ablaufen, bleibt jetzt: $Q^{**} \to Q$ der Q-Teil unverändert:

$$(13)\quad Q = \begin{bmatrix} Q_{Z1} & 0 \\ 0 & Q_{Q2} \end{bmatrix} ;$$

es ist also $Q_{Q2} = Q^{**}_{Q2}$.

Wichtig ist insbesondere, daß Spaltenoperationen niemals zwischen Spalten des Z- und des Q-Teils stattfinden. Daraus folgt, daß Q_{Z1} genau die Gitterbasiswechsel in $G(B_Z)$ beschreibt und die Nebendiagonale von Q durch 0-Matrizen besetzt ist.

Die neu eingeführten Gitterbasen lauten jetzt:

(14) $G(E) = G(P^{-1}) = Z^m \; : P^{-1}$

$G(B_Z) = G(\bar{B}_Z) \qquad : \bar{B}_Z = B_Z \;\; Q_{Z1}$

Die Transformation von $C = B$ in $\bar{C}$ läßt sich analog zu (222-12) durch:

(15) $\bar{C} = P \;\; \bar{B} = P \;\; B \;\; Q$

zusammenfassen.

(e) Art der Struktur von $\underline{B}$

Ausgangspunkt der Überlegungen war die triviale Beziehung:

(1) $\bar{a}_j = E \;\; \bar{a}_j,$

die als identische Darstellung der Vektoren $\bar{a}_j$ aus $A = [B,N]$ im Gitter $G(E)$ interpretierbar ist. Wir können nun fragen, welche Eigenschaften die Darstellung der Vektoren $\bar{a}_j$ bezüglich der neuen Basis P^{-1} als Ergebnis des Gitterbasiswechsels in $G(E)$ haben. In diesem neuen Koordinatensystem haben nach (3) die $\bar{a}_j$ bzw. $A = [B,N]$ die Form:

(16) $\underline{\underline{A}} = [\underline{\underline{B}},\underline{\underline{N}}] = P\,[B,N] = [P \cdot B, P \cdot N]$.

Durch die unimodulare Transformation hat insbesondere $\underline{\underline{B}}$ bestimmte Symmetrieeigenschaften bekommen, die im weiteren erläutert werden. Es muß hier genau der Unterschied zwischen $\bar{\underline{\underline{B}}}$ und $\underline{\underline{B}}$ beachtet werden; dargestellt am Beispiel der Teilmatrizen $\bar{\underline{\underline{B}}}_Z$ und $\underline{\underline{B}}_Z$ lautet er zusammengefaßt:

- $\bar{\underline{\underline{B}}}_Z$ ist eine neue Untergitterbasis für $G(B_Z)$ nach einer Koordinatentransformation in $G(B_Z)$ durch Q : $\bar{\underline{\underline{B}}}_Z = B_Z\ Q_{Z1}$.

- $\underline{\underline{B}}_Z$ ist das Bild von B_Z im Gitter $G(E)$ nach einer Koordinatentransformation in $G(E)$ durch P^{-1}: $\underline{\underline{B}}_Z = P\ B_Z$.

Nach (15) gilt: $\bar{\underline{\underline{C}}} = P\ B\ Q$. Durch Rechtsmultiplikation mit Q^{-1} wird daraus:

(17) $\bar{\underline{\underline{C}}}\ Q^{-1} = P\ B = \underline{\underline{B}}$.

Die linke Seite von (17) hat im einzelnen die Form [siehe (8) und (13)]:

$$(18)\quad \begin{bmatrix} \bar{\underline{\underline{C}}}_{Z1} & 0 \\ \bar{\underline{\underline{C}}}_{Z2} & \bar{\underline{\underline{C}}}_{Q2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_{Z1}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_{Q2}^{-1} \end{bmatrix} = \underline{\underline{B}}.$$

Nach Ausmultiplikation ergibt sich:

$$(19)\quad \begin{bmatrix} \bar{\bar{C}}_{Z1} \cdot Q_{Z1}^{-1} & 0 \\ \bar{\bar{C}}_{Z2} \cdot Q_{Z1}^{-1} & \bar{\bar{C}}_{Q2} \cdot Q_{Q2}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{B}}_{Z1} & 0 \\ \underline{\underline{B}}_{Z2} & \underline{\underline{B}}_{Q2} \end{bmatrix} = \underline{\underline{B}}.$$

Aus Gründen, die unten erläutert werden, sind für die weiteren Ganzzahligkeitsuntersuchungen nur die Informationen über die ersten n_{BZ} Koordinaten der Vektoren $\underline{\bar{a}}_j$ aus B_Z, also über:

$$(20)\quad \underline{\underline{B}}_{Z1} = \bar{\bar{C}}_{Z1}\ Q_{Z1}^{-1} = \bar{\bar{S}}_{Z1}\ Q_{Z1}^{-1} = [P_{Z1}, P_{Q1}]\ B_Z$$

bedeutsam.

$\bar{\bar{C}}_{Z1}$ ist in Elementarteilerform:

$$(21)\quad \bar{\bar{C}}_{Z1} = \bar{\bar{S}}_{Z1} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{s}}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underline{\underline{s}}_{n_{BZ}} \end{bmatrix}$$

Daraus folgt als wichtigstes Ergebnis der Transformation der Koeffizientenmatrix $A = [B,N]$ des allgemeinen GGLP-Problems durch P:

(22) Satz: Elementarteiler-Strukturierung von $\underline{\underline{B}}_{Z1}$

Gegeben sei das n_{BZ}-dimensionale Gitter $G(E)$, wobei E die $(n_{BZ} \cdot n_{BZ})$-Einheitsmatrix ist:

(α) In diesem Gitter liegen alle Vektoren $\bar{\underline{a}}_{1j}$ aus $\underline{B}_{Z1}$, also die ganzzahligen Basisvariablen von System (1 -7) zugeordneten Spalten, auf Koordinaten, die in der i-ten Komponente ($i = 1,\ldots,n_{BZ}$) Vielfache der Elementarteiler s_i aus $\underline{S}_{Z1}$ sind.

(β) Dagegen fallen alle Spalten, die zu nichtganzzahligen Basisvariablen gehören, in den Ursprung dieses Gitters, da $\underline{B}_{Q1} = 0$.

*****

(f) Struktur von $\underline{B}^{-1}$

Für die Inverse von $\underline{B}$ hat die Strukturierung durch P folgende Auswirkung. Definieren wir die Teilmatrizen von $\underline{B}^{-1}$ nach:

$$(23)\quad \underline{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{B}^{*}_{Z1} & \underline{B}^{*}_{Q1} \\ \underline{B}^{*}_{Z2} & \underline{B}^{*}_{Q2} \end{bmatrix}$$

So ergibt sich für die einzelnen Teilmatrizen, da $\underline{B}$ Dreiecksgestalt hat - siehe (19) - :

$$(24)\quad \underline{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{B}^{-1}_{Z1} & 0 \\ \underline{B}^{*}_{Z2} & \underline{B}^{-1}_{Q2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{Z1} \cdot \bar{C}^{-1}_{Z1} & 0 \\ \underline{B}^{*}_{Z2} & Q_{Q2} \cdot \bar{C}^{-1}_{Q2} \end{bmatrix}$$

Bezeichnen wir die Teilmatrix in der Z2-Position der Inversen von $\bar{\underline{C}}$ mit $\bar{\underline{C}}^{*}_{Z2}$, können wir auch noch $\underline{B}^{*}_{Z2}$ in (24) ersetzen, da nach (17) gilt:

$$(25)\quad (P\ \ B)^{-1} = B^{-1}\ P^{-1} = \underline{B}^{-1} = Q\ \ \bar{\underline{C}}^{-1}\ .$$

Aus $Q\ \ \bar{\underline{C}}^{-1}$ ergibt sich, daß:

$$(26)\quad \underline{B}^{*}_{Z2} = Q_{Q2}\ \ \bar{\underline{C}}^{*}_{Z2}.$$

$\underline{B}^{-1}$, allein ausgedrückt durch $\bar{\underline{C}}$ und Q, hat also die Form:

$$(27)\quad \underline{B}^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{Z1}\cdot \bar{\underline{C}}^{-1}_{Z1} & 0 \\ Q_{Q2}\ \ \bar{\underline{C}}^{*}_{Z2} & Q_{Q2}\cdot \bar{\underline{C}}^{-1}_{Q2} \end{bmatrix}\ .$$

Da für die weitere Ganzzahligkeitsanalyse, wie schon erwähnt wurde, nur die ersten n_{BZ} Zeilen von $P\ \ A = \underline{A}$ bzw. $\underline{B}^{-1}\ \ \underline{A}$ benötigt wurden, wird hier nur die spezielle Struktur von $\underline{B}^{-1}_{Z1}$ herausgestellt.

Aus (21) ergibt sich für die Inverse von $\bar{\underline{C}}_{Z1} = \bar{\underline{S}}_{Z1}$:

$$(28)\quad \bar{\underline{S}}^{-1}_{Z1} = \begin{bmatrix} 1/\bar{s}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\bar{s}_{n_{BZ}} \end{bmatrix}$$

Da $\underline{B}^{-1}$ nach (27) aus der unimodularen Matrix Q_{Z1} durch Rechtsmultiplikation mit $\bar{\underline{S}}^{-1}_{Z1}$ hervorgeht, bewirkt die Strukturierung durch P:

(29) Korollar zu Satz (22): Elementarteiler-Strukturierung von $\underline{\underline{B}}_{Z1}^{-1}$.

Die Elemente $\underline{\underline{a}}^*_{ij}$ $(i = 1,\ldots,n_{BZ})$ der Spalten $\underline{\bar{a}}^*_{1j}$ aus $\underline{\underline{B}}_{Z1}^{-1}$ $(j = 1,\ldots,n_{BZ})$ sind von der Form:

k/s_j,

wobei $k \in Z$ und s_j der j-te Elementarteiler aus $\bar{S}_{Z1}$ sind.

*****

Die Elemente jeder Spalte aus $\underline{\underline{B}}_{Z1}^{-1}$ haben also bei ganzzahligem Zähler den gleichen Nenner, wobei der Nenner der Elemente aus Spalte j den Nenner der Elemente aus Spalte j+1 teilt $(j = 1,2,\ldots,n_{BZ} - 1)$.

An dieser Stelle soll ein weiterer Satz angeschlossen werden, der im weiteren benötigt wird:

(30) Satz: Teilbarkeitseigenschaften der Spaltenelemente von $\underline{\underline{B}}_{Z1}^{-1}$

s_j ist jeweils der kleinste Hauptnenner, auf den sich die Elemente a^*_{ij} $(i = 1,\ldots,n_{BZ})$ der Spalten $\underline{\bar{a}}^*_{1j}$ $(j = 1,\ldots,n_{BZ})$ aus $\underline{\underline{B}}_{Z1}^{-1}$ bringen lassen.

Beweis: Die Spalten $\underline{\bar{a}}^*_{1j}$ entstehen jeweils dadurch, daß die Spalten $\bar{q}_j$ aus Q durch $\bar{s}_j$ dividiert werden $(j = 1,\ldots,n_{BZ})$.

Q ist eine unimodulare Matrix. Es wird jetzt allgemein gezeigt, daß der GGT aller Elemente q_{ij} $(i = 1,\ldots,n_{BZ})$ einer beliebigen Spalte $\bar{q}_j$ $(j = 1,\ldots,n_{BZ})$ einer unimodularen Matrix Q Eins ist, und damit ist der Satz bewiesen.

Es sei angenommen, die Elemente q_{ij} der j-ten Spalte $\bar{q}_j$ von Q haben den GGT $k > 1$. Für die Determinante von Q läßt sich dann schreiben:

$$(31)\quad \det Q = k \det [\bar{q}_1,\ldots,\bar{q}_j/k,\ldots,\bar{q}_{n_{BZ}}] = k \det Q' = \pm 1$$

Da k der GGT aller Elemente von $\bar{q}_j$ ist, muß Q' ganzzahlig sein und deshalb eine ganzzahlige Determinante besitzen. k ist jedoch schon größer als Eins. Deshalb muß immer gelten $|k \det Q'| \neq 1$. Also ist die Annahme falsch, daß die Elemente in einer beliebigen Spalte einer unimodularen Matrix einen GGT > 1 besitzen können. Wie man sieht, gilt diese Argumentation gleichermaßen für jede beliebige Zeile einer unimodularen Matrix.

*****

Wie Satz (29) ein Korollar zu Satz (22) ist, so läßt sich auch zu Satz (30) die Teilbarkeitsaussage auf die Inverse der betrachteten Matrix, konkret also auf $\underline{B}_{Z1}$, entsprechend übertragen:

(32) Korollar zu Satz (30):

Teilbarkeitseigenschaften der Zeilenelemente von $\underline{B}_{Z1}$

$\bar{s}_i$ ist jeweils der GGT aller Elemente a_{ij} $(j = 1,\ldots,n_{BZ})$ der Zeilen $\bar{a}_i$ $(i = 1,\ldots,n_{BZ})$ von $\underline{B}_{Z1}$.

Der Beweis für diesen Satz entspricht dem Beweis für Satz (30). Die betrachtete unimodulare Matrix ist hier jedoch Q_{Z1}^{-1}, da nach (20) $B_{Z1} = \bar{S}_{Z1}\ Q_{Z1}^{-1}$, und außerdem ist wegen der Linksmultiplikation von Q_{Z1}^{-1} mit der Elementarteilerform $\bar{S}_{Z1}$ die Eigenschaft einer unimodularen Matrix auszunutzen, daß der GGT der Zeilen einer solchen Matrix jeweils Eins ist.

(g) Zahlenbeispiel

Ableitungen und Ergebnisse dieses Kapitels soll am Zahlenbeispiel veranschaulicht werden. Die Daten dieses Beispiels, also B, stammen aus dem oben formulierten Beispiel einer allgemeinen GGLP-Aufgabe.

Im Mittelpunkt der Berechnungen in Tab. 5 steht die Umwandlung von C = B in $\bar{C}$ nach Algorithmus (2). Um P und Q zu erhalten, wurden beide Matrizen entsprechend den Transformationen in C aus der Einheitsmatrix mit umgerechnet. Nach (15) gilt: $\bar{C} = P\ B\ Q = P\ C\ Q$.

	P	Q	C	Umwandlung
SCHRITT (I)	$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3&12&29&2&2\\8&27&48&-2&10\\9&28&66&4&8\\2&9&25&2&2\\5&19&45&2&6\end{bmatrix}$	Z1:=Z1 - Z4 Z2:=Z2 + Z4 Z3:=Z3 -2 Z4 Z5:=Z5 - Z4
	$\begin{bmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&-2&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&-1&1\end{bmatrix}$	UNVERÄNDERT	$\begin{bmatrix}1&3&4&0&0\\10&36&73&0&12\\5&10&16&0&4\\2&9&25&2&2\\3&10&20&0&4\end{bmatrix}$	S5:=S5 - S4
	UNVERÄNDERT	$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&3&4&0&0\\10&36&73&0&12\\5&10&16&0&4\\2&9&25&2&0\\3&10&20&0&4\end{bmatrix}$	Z2:=Z2 -3 Z5 Z3:=Z3 - Z5
SCHRITT (II)	$\begin{bmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&4&-3\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&-1&1\end{bmatrix}$	UNVERÄNDERT	$\begin{bmatrix}1&3&4&0&0\\1&6&13&0&0\\2&0&-4&0&0\\2&9&25&2&0\\3&10&20&0&4\end{bmatrix}$	Z2:=Z2 - Z1 Z3:=Z3 -2 Z1
	$\begin{bmatrix}1&0&0&-1&0\\-1&1&0&5&-3\\-2&0&1&1&-1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&-1&1\end{bmatrix}$	UNVERÄNDERT	$\begin{bmatrix}1&3&4&0&0\\0&3&9&0&0\\0&-6&-12&0&0\\2&9&25&2&0\\3&10&20&0&4\end{bmatrix}$	S2:=S2 -3 S1 S3:=S3 -4 S1
	UNVERÄNDERT	$\begin{bmatrix}1&-3&-4&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&3&9&0&0\\0&-6&-12&0&0\\2&3&17&2&0\\3&1&8&0&4\end{bmatrix}$	Z3:=Z3 +2 Z2
	$\begin{bmatrix}1&0&0&-1&0\\-1&1&0&5&-3\\-4&2&1&11&-7\\0&0&0&1&0\\0&0&0&-1&1\end{bmatrix}$	UNVERÄNDERT	$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&3&9&0&0\\0&0&6&0&0\\2&3&17&2&0\\3&1&8&0&4\end{bmatrix}$	S3:=S3 -3 S2
	$\boxed{P}$ UNVERÄNDERT	$\begin{bmatrix}1&-3&5&0&0\\0&1&-3&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&3&0&0&0\\0&0&6&0&0\\2&3&8&2&0\\3&1&5&0&4\end{bmatrix}$	$\leftarrow \bar{\bar{C}}_{Z1} = \bar{\bar{S}}_{Z1}$
		$\boxed{Q}$	$\boxed{\bar{\bar{C}}}$	

Tab. 5: GGLP-Strukturierung durch Algorithmus (2)

B hat schon in der Formulierung des Ausgangsproblems - Tab. 2 - eine vorsortierte Struktur, damit das Zahlenbeispiel nicht zu rechenaufwendig wird und in allen einzelnen Schritten übersichtlich bleibt. Aus dieser Vorsortierung resultiert z.B., daß bei der Ableitung in Tab. 5 keine Spalten- und/oder Zeilenvertauschungen durchgeführt werden müssen und sich auch für $\bar{C}_{Q2}$ Elementarteilerform ergibt. Letzteres ist ja nicht notwendig, da wir nur die Schritte (I) bis (V) von Algorithmus (1) auf C_Q anwenden.

Weiterhin ist die 0-Matrix in P in der Position P_{Z2} auch ein zufälliges Ergebnis der Vorsortierung; im allgemeinen ist $P_{Z2} \neq 0$. Aus C und Q allerdings werden die allgemeinen Formen deutlich:

- Q_{Z2} und Q_{Q1} sind Nullmatrizen
- C_{Q1} ist eine Nullmatrix.

Die abgeleiteten Elementarteiler in $\underline{\underline{S}}_{Z1}$ lauten [siehe (21)]:

(33) $s_1 = 1 \qquad s_2 = 3 \qquad s_3 = 6.$

$\underline{\underline{B}}_{Z1}$ und $\underline{\underline{B}}_{Z1}^{-1}$ haben die Form:

$$(34)\quad \underline{\underline{B}}_{Z1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{B}}_{Z1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3/3 & 5/6 \\ 0 & 1/3 & -3/6 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}$$

Wie man sieht, sind die Koeffizienten der Zeilen von $\underline{\underline{B}}_{Z1}$ die Vielfachen der s_i, entsprechend die der Spalten von

$\underline{\underline{B}}_{Z1}^{-1}$ Vielfache von $1/s_i$ [Satz (22) und Korollar (29)]. Weiterhin sind die GGT der Koeffizienten in den Zeilen von $\underline{\underline{B}}_{Z1}$ gleich den s_i und entsprechend die kleinsten Hauptnenner der Koeffizienten in den Spalten von $\underline{\underline{B}}_{Z1}^{-1}$ auch jeweils gleich den s_i [Satz (30) und Korollar (32)].

Die neuen Basen, die in $G(E)$ und $G(B_Z)$ als Ergebnis der Ableitungen eingeführt wurden, stehen in einer Beziehung ähnlich (222-4) zueinander [siehe (14)]:

$$(35)\qquad \begin{bmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 8 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 27 \\ 2 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{B}}_u^* = \underline{\underline{B}}^* \cdot \underline{\underline{S}}$$

$$\underline{\underline{B}}_Z\, \underline{\underline{Q}}_{Z1} = \underline{\underline{B}}_Z = \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}}$$

$$= \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\underline{S}}_{Z1} \\ \underline{\underline{S}}_{Z2} \end{bmatrix}$$

232. Ableitung der Kongruenz aus der strukturierten Koeffizientenmatrix des gemischt-ganzzahligen linearen Programmierungsproblems

(a) Problemstellung

Nach der Transformation durch P lautet das Nebenbedingungssystem von Aufgabe (1 -7):

$$(1) \qquad P\ B\ \bar{x}_B + P\ N\ \bar{x}_N = P\ \bar{b} \quad \text{oder:}$$

$$(1\text{-}\alpha) \qquad \underset{=}{B}_{Z1}\ \bar{x}_{BZ} + \underset{=}{N}_1\ \bar{x}_N = \bar{\underset{=}{b}}_1$$

$$(1\text{-}\beta) \qquad \underset{=}{B}_{Z2}\ \bar{x}_{BZ} + \underset{=}{B}_{Q2}\ \bar{x}_{BQ} + \underset{=}{N}_2\ \bar{x}_N = \bar{\underset{=}{b}}_2$$

Wir werden im weiteren untersuchen, in welcher Weise $\bar{x}_N$ festgelegt werden muß, um ein ganzzahliges $\bar{x}_{BZ}$ zu produzieren. Für diese Untersuchung brauchen wir uns nur auf das Gleichungssystem (1-α) zu beschränken. Dieses System besteht aus n_{BZ} Gleichungen mit $n_{BZ} + n_{NZ} + n_{NQ}$ Variablen. Wenn wir von den Variablen die $(n_{NZ} + n_{NQ})$ freien Variablen festlegen, ist damit $\bar{x}_{BZ}$ eindeutig bestimmt, da $\underset{=}{B}_{Z1}$ vollen Rang besitzt. Die Transformation durch P hat bewirkt, daß aus diesem System $\bar{x}_{BQ}$ verschwunden ist. In welcher Weise $\bar{x}_{BQ}$ als weiterer Vektor abhängiger Variabler durch die Fixierung der freien Variablen auf einen bestimmten Wert festgelegt ist, wird durch System (1-β) beschrieben; darauf kommen wir unten noch zurück. Für die weitere Betrachtung der Ganzzahligkeitsbedingungen wird (1-β) jedenfalls nicht berücksichtigt.

Die Isolierung des ganzzahligen Teils der Basisvariablen in (1_{η}) erlaubt es, Bedingungen für die Ganzzahligkeit von $\bar{x}_{BZ}$ aufzustellen, welche analog denen sind, die man beim RGLP-Fall für den gesamten Vektor der Basisvariablen, der dort ja ganzzahlig sein muß, formulieren kann. Für das GGLP-Problem muß hier allerdings noch zusätzlich beachtet werden, daß auch $\bar{x}_N$ aus einem ganzzahligen und einem rationalen Teil besteht; die damit im einzelnen zusammenhängenden Fragen sollen jedoch zunächst zurückgestellt werden.

(b) Ganzzahligkeitsbedingung auf der Grundlage von Gittern

Die $(n_{BZ} \cdot n_{BZ})$-Matrix $\underline{\underline{B}}_{Z1}$ ist Basis eines n_{BZ}-dimensionalen Untergitters $G(\underline{\underline{B}}_{Z1}) \subset G(E)$, wobei E Einheitsmatrix mit den gleichen Dimensionen wie $\underline{\underline{B}}_{Z1}$ ist. Eigenschaften des Gitters $G(\underline{\underline{B}}_{Z1})$ und seiner Basis sind im folgenden Satz zusammengefaßt:

(2) Satz: Eigenschaften von $G(\underline{\underline{B}}_{Z1})$

$\underline{\underline{B}}_{Z1}$ ist Basis für alle Vektoren

(3) $\bar{y} := \underline{\underline{B}}_{Z1} \; \bar{x}_{BZ} \quad (\bar{x}_{BZ} \in Z^{n_{BZ}})$

und nur für solche aus G(E), die in der i-ten Komponente Vielfache von s_i aus $\bar{S}_{Z1}$ sind $(i = 1,\ldots,n_{BZ})$.

Beweis:

Es ist direkt ersichtlich, daß $\underline{\underline{B}}_{Z1}$ nur Basis für solche Vektoren $\bar{y} \in G(E)$ sein kann, deren Komponenten jeweils Vielfache der Elementarteiler s_i sind; dies folgt aus der Struk-

tur von $\underline{\underline{B}}_{Z1}$.

Nicht so unmittelbar klar ist, daß $\underline{\underline{B}}_{Z1}$ Basis für alle derartigen Vektoren ist. Dies läßt sich aus Beziehung (231-20): $\underline{\underline{B}}_{Z1} = \bar{\bar{S}}_{Z1} \; Q_{Z1}^{-1}$ herleiten. Da Q_{Z1}^{-1} unimodular ist, kann es als Basis von G(E) dienen. Da über $Q_{Z1}^{-1} \; \bar{x}_{BZ}$ demnach alle ganzzahligen n_{BZ}-Vektoren erzeugbar sind, müssen mit:

$$\bar{\bar{S}}_{Z1} \; (Q_{Z1}^{-1} \; \bar{x}_{BZ}) = \underline{\underline{B}}_{Z1} \; \bar{x}_{BZ}$$

alle Vektoren produziert werden können, welche die o.a. Eigenschaften haben.

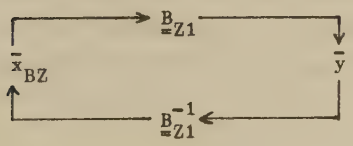
*****

Diese Symmetrieeigenschaften erlauben es, in einfacher Weise Vektoren $\bar{y} \in G(E)$ zu identifizieren, die in das Gitter $G(\underline{\underline{B}}_{Z1})$ fallen.

Da $\underline{\underline{B}}_{Z1}$ regulär ist, gilt Beziehung (3) umkehrbar eindeutig:

(4) Satz: Korrespondenz $\bar{x}_{BZ}$ und $\bar{y}$

Jedem Vektor $\bar{y} \in G(\underline{\underline{B}}_{Z1})$ entspricht genau ein Vektor $\bar{x}_{BZ} \in Z^{n_{BZ}}$ und umgekehrt:



*****

$\bar{x}_{BZ}$ ist nicht frei wählbar, sondern nach (1-σ) eindeutig durch $\bar{x}_N$ festgelegt. Löst man nach $\bar{x}_{BZ}$ auf, so ergibt sich:

(5) $\bar{x}_{BZ} = \underline{B}_{Z1}^{-1} (\bar{b}_1 - \underline{N}_1 \bar{x}_N)$.

Analog zu (3) lassen sich mit $\bar{x}_N \in Q^n N$ Vektoren $\bar{y}^* \in Q^n BZ$ erzeugen durch:

(6) $\bar{y}^* = \underline{B}_{Z1} \underline{B}_{Z1}^{-1} (\bar{b} - \underline{N} \bar{x}) = \bar{b}_1 - \underline{N}_1 \bar{x}_N$.

Aus (2), (4) und (6) ist jetzt der für die weiteren Betrachtungen wichtige Satz ableitbar:

(7) <u>Satz:</u> Bedingungen für ganzzahliges $\bar{x}_{BZ}$

Notwendige und hinreichende Bedingung für ganzzahliges $\bar{x}_{BZ}$ ist:

$\bar{y}^* = \bar{b}_1 - \underline{N}_1 \bar{x}_N = \bar{y} \in G(\underline{B}_{Z1})$.

*****

Zur Beachtung der gesamten Nebenbedingungen des GGLP-Ansatzes ist dabei die freie Variable $\bar{x}'_N = [\bar{x}'_{NZ}, \bar{x}'_{NQ}]$ derart zu wählen, daß $\bar{x}_{NZ} \in \mathbb{Z}^n NZ$ und $\bar{x}_{NQ} \in Q^n NQ$ und weiterhin $[\bar{x}'_B, \bar{x}'_N] \geq \bar{0}'$.

(c) Homomorphismus $\nu_S : \mathcal{G}(E) \to \mathcal{G}_{BZ}$ -

Nach Satz (7) ist also die Bedingung für ganzzahliges $\bar{x}_{BZ}$, die freie Variable $\bar{x}_N$ derart festzulegen, daß sie Vektoren $\bar{y} = \underline{b}_1 - \underline{N}_1 \bar{x}_N$ erzeugt, die komponentweise Vielfache der Elementarteiler aus $\bar{S}_{Z1}$ sind. Für die Ganzzahligkeit von $\bar{x}_B$ ist dabei unbeachtlich, welche Vielfache der Elementarteiler jeweils Komponenten von $\bar{y}$ sind; wichtig ist allein, daß durch $\bar{x}_N$ irgendein Gitterpunkt von $G(\underline{B}_{Z1})$ erzeugt wird.

Diese Ganzzahligkeitsbedingung läßt sich in geeigneter Weise gruppentheoretisch formulieren. Es wird zunächst eine der Aussage von Satz (7) entsprechende Kongruenzbedingung aufgestellt, auf deren Grundlage dann weitergearbeitet wird.

Zu diesem Zweck definieren wir $\mathcal{G}(E)$ als unendlichen Modul, dessen Elemente alle ganzzahligen n_{BZ}-Vektoren sind. Weiterhin sei $\mathcal{G}(\underline{B}_{Z1})$ ein unendlicher Modul, dessen Elemente alle ganzzahligen n_{BZ}-Vektoren sind, die in der i-ten Komponente jeweils Vielfache von s_i aus $\bar{S}_{Z1}$ sind ($i = 1,\ldots,n_{BZ}$). Während $\mathcal{G}(E)$ offenbar mit dem Gitter $G(E)$ korrespondiert, ist $\mathcal{G}(\underline{B}_{Z1})$ in Relation zu $G(\underline{B}_{Z1})$ zu sehen.

Da für die Ganzzahligkeit von $\bar{x}_{BZ}$ nicht interessant ist, welches Element aus $\mathcal{G}(\underline{B}_{Z1})$ durch $\bar{x}_N$ erzeugt wird, sondern nur, daß ein solches Element getroffen wird, brauchen wir nicht zwischen den verschiedenen Elementen von $\mathcal{G}(\underline{B}_{Z1})$ zu unterscheiden. In gleicher Weise sind von den Elementen aus $\mathcal{G}(E)$, die nicht gleichzeitig Elemente der Untergruppe $\mathcal{G}(\underline{B}_{Z1})$ sind, nur die Resteigenschaften bezüglich $\mathcal{G}(\underline{B}_{Z1})$ bedeutsam. Diese Informationsver-

dichtung wird erreicht, indem wir durch einen Homomorphismus ν' $G(E)$ auf die endliche Faktorgruppe G'_{BZ} abbilden. Kern des Homomorphismus ist $G(\underline{\underline{B}}_{Z1})$ [siehe hierzu (221-d)].

In G'_{BZ} entspricht dem Einselement die Untergruppe $G(\underline{\underline{B}}_{Z1}) \subset G(E)$. Die anderen Elemente von G'_{BZ} entsprechen den Restklassen von $G(\underline{\underline{B}}_{Z1})$ in $G(E)$.

Wegen der speziellen Struktur von $\underline{\underline{B}}_{Z1}$ ist eine homomorphe Abbildung ν_S, die $G(E)$ auf eine zur Faktorgruppe $G(E)/G(\underline{\underline{B}}_{Z1})$ isomorphe Gruppe G_{BZ} abbildet, leicht zu finden. G_{BZ} hat dabei folgendes Aussehen:

(8) Definition:

G_{BZ} sei definiert als endliche Gruppe aller ganzzahligen n_{BZ}-Vektoren $\bar{g}$, für deren Komponenten g_i jeweils gilt:
$0 \leq g_i < s_i \quad (i = 1,\ldots,n_{BZ})$,
wobei s_i Elementarteiler aus $\bar{\underline{\underline{S}}}_{Z1}$ ist.

*****

(9) Definition:

ν_S sei definiert als Gruppenhomomorphismus:
$G(E) \rightarrow G_{BZ}$,
der jedes Element $\bar{h}' = [h_1,\ldots,h_i,\ldots,h_{n_{BZ}}]$ aus $G(E)$ auf das Element $\bar{g}' = [g_1,\ldots,g_i,\ldots,g_{n_{BZ}}]$ aus G_{BZ} abbildet, wobei:

$g_i = h_i \bmod s_i \quad (i = 1,\ldots,n_{BZ})$.

*****

Ein ausführlicher Beweis, daß der Kern eines solchen Homomorphismus ν_S der Untermodul $G(\underline{\underline{B}}_{Z1}) \subset G(E)$ und $G_{BZ} \cong G(E)/G(\underline{\underline{B}}_{Z1})$, findet sich bei HU [1969, S. 320f.] für das RGLP-Problem. Da dieser Beweis für das GGLP-Problem unter Beachtung der entsprechenden andersartigen Definitionen in analoger Weise Gültigkeit hat, soll er hier nicht wiederholt werden.

Die Restklasse, zu der ein Vektor $\bar{h} \in G(E)$ gehört, läßt sich nach (9) also dadurch identifizieren, daß man $\bar{h}$ komponentweise mod s_i reduziert. Aus (8) und (9) ergibt sich, daß die Zahl unterschiedlicher Restklassen von $G(\underline{\underline{B}}_{Z1})$ in $G(E)$ und damit die Gruppenordnung von G_{BZ} gleich dem Produkt:

$$(10) \qquad \prod_{i=1,\ldots,n_{BZ}} s_i$$

sind. Je Komponente h_i von $\bar{h} \in G(E)$ kann man bezüglich $G(\underline{\underline{B}}_{Z1})$ also genau s_i verschiedene Reste unterscheiden.

Wie oben gezeigt wurde [siehe (222-h)], gilt für dieses Produkt:

$$(11) \qquad \prod_{i=1,\ldots,n_{BZ}} s_i = |\det \bar{\underline{\underline{C}}}_{Z1}| = |\det \bar{\underline{\underline{S}}}_{Z1}| = |\det \underline{\underline{B}}_{Z1}|$$

G_{BZ} ist eine endliche Abel'sche Gruppe, in der als Gruppenoperation die Addition mod $\bar{\underline{\underline{S}}}_{Z1}$ definiert ist, also komponentweise Addition mod s_i. G_{BZ} läßt sich als direkte Summe von n_{BZ} zyklischen Untergruppen aus G_{BZ} darstellen (vgl. BAUMGARTNER [1964, § 52]).

Dazu bezeichnen wir mit $\bar{e}_i$ den i-ten Einheitsvektor. $\{k_i\ \bar{e}_i\} \in G_{BZ}$ sei eine zyklische Untergruppe aller Vektoren $k_i\ \bar{e}_i \in G_{BZ}$ mit $0 \leq k_i < s_i$, für die $\bar{e}_i$ erzeugendes Element und deren Ordnung jeweils s_i ist. G_{BZ} ergibt sich als die direkte Summe:

$$(12)\quad G_{BZ} = \{k_1\ \bar{e}_1\} \oplus \ldots \oplus \{k_i\ \bar{e}_i\} \oplus \ldots \oplus \{k_{n_{BZ}}\ \bar{e}_{n_{BZ}}\},$$

(d) Ganzzahligkeitsbedingungen als Kongruenz in G_{BZ}

Unter Verwendung der vorstehenden Ableitungen und Definitionen läßt sich die Ganzzahligkeitsbedingung für $\bar{x}_{BZ}$ als Gruppengleichung formulieren. Ausgangspunkt der Betrachtung ist System (1-α), das hier unter Aufgliederung des Nebenbasisteils wiedergegeben ist:

$$(13)\quad \underline{\underline{B}}_{Z1}\ \bar{x}_{BZ} + \underline{\underline{N}}_{Z1}\ \bar{x}_{NZ} + \underline{\underline{N}}_{Q1}\ \bar{x}_{NQ} = \bar{\underline{b}}_1.$$

Da in diesem System entsprechend Voraussetzung und nach den GGLP-Nebenbedingungen die Vektoren $\underline{\underline{B}}_{Z1}\ \bar{x}_{BZ}$, $\underline{\underline{N}}_{Z1}\ \bar{x}_{NZ}$ und $\bar{\underline{b}}_1$ für zulässige Lösungen ganzzahlig sind, muß auch $\underline{\underline{N}}_{Q1}\ \bar{x}_{NQ}$ ganzzahlig sein, sofern (13) überhaupt eine zulässige Lösung besitzt. Den Fall, daß die Lösungsmenge von (13) leer ist, wollen wir an dieser Stelle ausklammern. Es folgt also, daß wir den nach (9) definierten Homomorphismus ν_S auf (13) anwenden können:

$$(14)\quad \nu_S\ (\underline{\underline{B}}_{Z1}\ \bar{x}_{BZ}) + \nu_S(\underline{\underline{N}}_{Z1}\ \bar{x}_{NZ}) + \nu_S(\underline{\underline{N}}_{Q1}\ \bar{x}_{NQ}) = \nu_S\ \bar{\underline{b}}_1.$$

Aus Satz (2) wissen wir von der Eindeutigkeit des ersten Klammerausdrucks. $\underline{\underline{B}}_{Z1}\ \bar{x}_{BZ}$ ist also dann und nur dann Element von $\mathcal{C}(\underline{\underline{B}}_{Z1})$, wenn $\bar{x}_{BZ}$ ganzzahlig ist. In einem solchen Fall wird also der erste Term immer zum Einselement von $\mathcal{C}_{BZ}$:

(15) $\nu(\underline{\underline{B}}_{Z1}\ \bar{x}_{BZ}) = \bar{0} \in \mathcal{C}_{BZ}$, wenn $\bar{x}_{BZ} \in Z^{n_{BZ}}$.

Daraus folgt als Bedingung für ganzzahliges $\bar{x}_{BZ}$:

(16) Satz: Kongruenzbedingung für ganzzahliges $\bar{x}_{BZ}$ auf Grundlage von $\underline{\underline{B}}_{Z1}$

Notwendige und hinreichende Bedingung für ganzzahliges $\bar{x}_{BZ}$ ist die Erfüllung der Kongruenz:

$$(\alpha)\ \nu_S\ (\underline{\underline{N}}_{Z1}\ \bar{x}_{NZ}) + \nu_S(\underline{\underline{N}}_{Q1}\ \bar{x}_{NQ}) = \nu_S\ \bar{\underline{b}}_1$$

bzw. (β) $$\underline{\underline{N}}_{Z1}\ \bar{x}_{NZ} + \underline{\underline{N}}_{Q1}\ \bar{x}_{NQ} \equiv \bar{\underline{b}}_1 \pmod{\bar{S}_{Z1}}$$

*****

Der prinzipielle Aufbau dieser Bedingung ist gleich der für den RGLP-Fall (vgl. dazu GOMORY [1969, S. 456]). Nur beschränken wir uns hier auf den Unterraum der ganzzahligen Basisvariablen, haben die Strukturierung von B in allgemeinerer Form hergeleitet und müssen den nichtganzzahligen Nebenbasisteil noch in besonderer Weise behandeln.

Die Addition in (16-γ) ist in der Gruppe G_{BZ} erklärt und deshalb mod $\bar{S}_{Z1}$. Die Ganzzahligkeitsbedingung für $\bar{x}_{BZ}$ in dieser Formulierung einer Gruppengleichung läßt sich direkt zur Konstruktion von Optimierungsverfahren für das GGLP-Problem verwenden, wie wir später sehen werden. Insofern ist Satz (16) ein zentrales Theorem dieser Arbeit.

Um ein ganzzahliges $\bar{x}_B$ zu erhalten, müssen nach (16-ß) $\bar{x}_{NZ}$ und $\bar{x}_{NQ}$ also ganzzahlige Vektoren erzeugen, deren Summe in die gleiche Restklasse von $G(\underline{\underline{B}}_{Z1})$ in $G(E)$ fällt wie $\bar{\underline{b}}_1$. Dies besagt mit anderen Worten, daß die Summe der Reste, die durch $\bar{x}_{NZ}$ und $\bar{x}_{NQ}$ produziert wird, gleich dem durch $\bar{\underline{b}}_1$ bezüglich $G(\underline{\underline{B}}_{Z1})$ vorgegebenen Rest sein muß. Diese letzte Aussage hatten wir in ähnlicher Form schon bei der Aufstellung des Ausgangsproblems unter (1 -f) formuliert. Hier liegt diese Aussage jetzt insofern in aufbereiteter Form vor, als die Resteigenschaften aus (16) genau ersichtlich werden und zur Konstruktion von Optimierungsalgorithmen vielfältiger Art verwendbar sind. Eine weitere Interpretation von Satz (16) ist schließlich, daß notwendige und hinreichende Bedingung für ganzzahliges $\bar{x}_B$ ist, wenn die Differenz ν_S $(\underline{\underline{N}}_1 \cdot \bar{x}_N - \bar{\underline{b}}_1)$ in G_{BZ} liegt, die Reste von $\underline{\underline{N}}_1 \cdot \bar{x}_N$ und $\bar{\underline{b}}_1$ in bezug auf $G(\underline{\underline{B}}_{Z1})$ sich also gerade aufheben.

(e) Prinzipielle Behandlung des nichtganzzahligen Nebenbasisteils

Bei den weiteren Betrachtungen gehen wir von System (16-ß) aus. Da ν_S eine homomorphe Abbildung:

(17) $\nu_S : \bar{h}_i \to \bar{g}_i \quad (\bar{h}_i \in \mathfrak{G}(E), \bar{g}_i \in \mathfrak{G}_{BZ})$

ist, muß gelten, daß das Bild einer Summe von Elementen $\sum_i \bar{h}_i \in \mathfrak{G}(E)$ in $\mathfrak{G}_{BZ}$ gleich der Summe der Bilder $\sum_i \bar{g}_i \in \mathfrak{G}_{BZ}$ der einzelnen Elemente $\bar{h}_i$ in $\mathfrak{G}_{BZ}$ ist.

System (16-ß) läßt sich also entsprechend weiter aufgliedern:

(18) $$\sum_{j \in J_{NZ}} (\nu_S \, \bar{\underline{a}}_{1j}) \, x_j + \nu_S \Big(\sum_{j \in J_{NQ}} \bar{\underline{a}}_{1j} \, x_j \Big) = \nu_S \, \bar{\underline{b}}_1$$

Hierbei werden mit $\bar{\underline{a}}_{1j}$ allgemein die Spaltenvektoren aus $\underline{A}_1 = [\underline{B}_1, \underline{N}_1]$ bezeichnet.

Wir werden später einen Optimierungsalgorithmus für GGLP-Aufgaben vorstellen, der innerhalb der endlichen Faktorgruppe $\mathfrak{G}_{BZ}$ auf Basis eines Komplexes der Gruppenelemente arbeitet. Einige der Elemente dieses Komplexes haben wir durch $\nu_S \, \bar{\underline{a}}_{1j}$ $(j \in J_{NZ})$ identifiziert. Für den nichtganzzahligen Nebenbasisteil kann man jedoch den Ausdruck:

(19) $$\underline{N}_{Q1} \; \bar{x}_{NQ} = \sum_{j \in J_{NQ}} \bar{\underline{a}}_{1j} \, x_j$$

nicht weiter aufgliedern, da $x_j \in Q$. Wie schon erwähnt, sieht man nur sofort, daß für ganzzahliges $\bar{x}_{BZ}$ die mit $\bar{x}_{NQ}$ gewichtete Summe der Spalten $\bar{\underline{a}}_{1j}$ aus $\underline{N}_{Q1}$ ganzzahlig sein muß, da sonst Kongruenz (16) nicht erfüllt sein kann.

Um die Struktur der GGLP-Problems vollständig erfassen und den erwähnten Optimierungsalgorithmus anwenden zu können, müssen wir für Ausdruck (19) weitere Überlegungen anstellen, die hier kurz formal zusammengefaßt werden. Diese Überlegungen werden zeigen, daß über die rationalen Nebenbasisvariablen ein Komplex $K_{BZ}^{NQ} \subset G_{BZ}$ erzeugt werden kann. Bezeichnen wir die Elemente von K_{BZ}^{NQ} mit $\bar{\underset{\sim}{a}}_{1h}$, so gilt:

$$(20)\quad \bar{\underset{\sim}{a}}_{1h} = \nu_S \left(\sum_{j \in J_{NQ}} \bar{\underset{=}{a}}_{1j} \; \underset{\sim}{\gamma}_{jh} \right)$$

für jedes dieser Elemente, deren Index allgemein h sei. In (20) stellen die $\underset{\sim}{\gamma}_{jh}$ rationale Skalare dar.

Term (19) aus Beziehung (18) wird dann ersetzt durch:

$$(21)\quad \nu_S \left(\sum_j \bar{\underset{=}{a}}_{1j} \; x_j \right) = \sum_h \left[\nu_S \left(\sum_j \bar{\underset{=}{a}}_{1j} \; \underset{\sim}{\gamma}_{jh} \right) \right] y_h = \sum_h \bar{\underset{\sim}{a}}_{1h} \; y_h,$$

wobei die y_h ganzzahlige Variable sind und:

$$(22)\quad x_j = \sum_h \underset{\sim}{\gamma}_{jh} \; y_h \qquad (j \in J_{NQ}).$$

Mit der Ersetzung des Nebenbasisteils aus (18) entsprechend (21) haben wir Kongruenz (16-ß) in ein System verwandelt, in dem nur ganzzahlige Variable definiert sind:

$$(23)\quad \sum_j (\nu_S \bar{\underline{a}}_{1j})\, x_j + \sum_h \bar{\underline{a}}_{1h}\, y_h = \nu_S \bar{\underline{b}}_1 .$$

Auf (23) können wir den gleichen Gruppenoptimierungsalgorithmus anwenden, wie auf ein RGLP-Problem.

Bevor wir diese Transformation des nichtganzzahligen Nebenbasisteils näher diskutieren, wird ein Korollar für die Kongruenzbedingung formuliert, diesmal nicht ausgehend von $\underline{\underline{B}}_{Z1}$ wie bei Satz (16), sondern von $\underline{\underline{B}}_{Z1}^{-1}$. Damit erhält man dann gleichzeitig direkte Aussagen über die Restbeschaffenheit aller Spalten des optimalen LP-Tableaus (1 -13-α) unseres GGLP-Problems.

(f) Homomorphismus ν_E: $G(\underline{\underline{B}}_{Z1}^{-1}) \to G_B{}^{-1}{}_Z$

Die Strukturierung von $\underline{\underline{B}}_{Z1}$ hatte den Zweck, die Gruppeneigenschaften der Reste von (1 -13-α), vor allem die Darstellung von G_{BZ} als direkte Summe seiner Untergruppen, in übersichtlicher Weise hervorzuheben. Statt mit der Gruppe der Reste selbst zu arbeiten, läßt sich einfacher mit der dazu isomorphen Gruppe G_{BZ} operieren.

Der ausführliche Beweis dieser Isomorphie wird unter Abschnitt (h) gegeben. Dieser Gliederungspunkt (f) dient der Vorbereitung dieses Beweises. Unter (g) schließlich werden die Isomorphieeigenschaften ausgenutzt, um ein Korollar zu Satz (16) aufzustellen.

Es werden die folgenden Vereinbarungen benötigt.

$G(E)$ habe als unendlicher Modul aller ganzzahligen n_{BZ}-Vektoren dieselbe Bedeutung wie unter (c).

$G(\underline{B}_{Z1}^{-1})$ sei die unendliche Gruppe aller n_{BZ}-Vektoren $\bar{g}$, die sich jeweils darstellen lassen durch:

$$(24)\quad \bar{g} = x_1 \; \underline{\bar{a}}^*_{1 1} + \ldots + x_j \; \underline{\bar{a}}^*_{1 j} + \ldots + x_{n_{BZ}} \; \underline{\bar{a}}^*_{1 n_{BZ}},$$

wobei $x_j \in Z$ und $\underline{\bar{a}}^*_{1 j}$ die j-te Spalte aus $\underline{B}_{Z1}^{-1}$ sind.

Die Struktur dieser Gruppe wird deutlich, wenn man die Symmetrie von $\underline{B}_{Z1}^{-1}$ beachtet: alle Komponenten des j-ten Vektors $\underline{\bar{a}}^*_{1 j}$ sind demnach ganzzahlige Vielfache von $1/s_j$ mit s_j als j-tem Elementarteiler aus $\bar{S}_{Z1}$.

$G(E)$ ist Untergruppe von $G(\underline{B}_{Z1}^{-1})$, da nach (231-24):

$$(25)\quad \underline{B}_{Z1}^{-1} = Q_{Z1} \; \underline{C}_{Z1}^{-1} = Q_{Z1} \; \underline{S}_{Z1}^{-1}$$

und Q_{Z1} wegen seiner Unimodularität als Basis aller ganzzahligen n_{BZ}-Vektoren dienen kann. Über (24) werden damit auch alle ganzzahligen n_{BZ}-Vektoren erfaßt.

ν_E sei ein Homomorphismus, der angewandt auf Vektoren und Matrizen, deren Komponenten mod 1 reduziert. Da ν_E also nichts anderes besagt als Abspaltung der ganzzahligen Teile aller Koeffizienten, erhält man eine der Faktorgruppe $\mathfrak{G}(\underline{B}_{Z1}^{-1})/\mathfrak{G}(E)$ isomorphe Gruppe $\mathfrak{G}_B{}^{-1}{}_Z$ dadurch, daß man alle Vektoren $\bar{g} \in \mathfrak{G}(\underline{B}_{Z1}^{-1})$ auf die Vektoren $\bar{h} \in \mathfrak{G}_B{}^{-1}{}_Z$ abbildet, die ihren echten Bruchteilen entsprechen. Die Zahl der Vektoren $\bar{h} \in \mathfrak{G}_B{}^{-1}{}_Z$ ist endlich; dies sieht man deutlich an der Zerlegung von $\mathfrak{G}_B{}^{-1}{}_Z$ in n_{BZ} zyklische Untergruppen, die analog zu $\mathfrak{G}_{BZ}$ möglich ist [siehe (12)]:

$$(26)\quad \mathfrak{G}_B{}^{-1}{}_Z = \left\{ \nu_E\, k_1\ \bar{\underline{a}}^*_{1 1} \right\} \oplus \cdots \oplus \left\{ \nu_E\, k_j\ \bar{\underline{a}}^*_{1 j} \right\} \oplus \cdots \oplus \left\{ \nu_E\, k_{n_{BZ}}\ \bar{\underline{a}}^*_{1 n_{BZ}} \right\}$$

$(0 \le k_j < s_j;\ \bar{\underline{a}}^*_{1 j}$:= j-te Spalte aus $\underline{B}_{Z1}^{-1})$

In $\mathfrak{G}_B{}^{-1}{}_Z$ ist Addition mod E erklärt. In (26) steht $\{\nu_E\, k_j\ \bar{\underline{a}}^*_{1 j}\}$ für die j-te Untergruppe der Ordnung s_j, wobei s_j Elementarteiler aus $\underline{S}_{Z1}$ ist. Alle Elemente dieser Untergruppe sind über $\nu_E\, k_j\ \bar{\underline{a}}^*_{1 j}$ konstruierbar.

Die Reste der Vektoren $k_j\ \bar{\underline{a}}^*_{1 j}$ sind für $k_j := k'_j + z\ s_j$ bei festem k'_j und variablem z mit $k'_j, z \in Z$ periodisch, da der Nenner aller Komponenten von $\bar{\underline{a}}^*_{1 j}$ gleich s_j ist. Deshalb gilt $0 \le k_j < s_j$.

Daß die Ordnung der über die erzeugenden Elemente $\nu_E \bar{\underline{a}}^*_{1j}$ produzierten Untergruppen jeweils s_j ist, wird hier nicht so deutlich wie aus (12). Es folgt aber direkt aus Satz (231-30). Danach ist der GGT der Zähler aller Komponenten bei jedem Vektor $\bar{\underline{a}}^*_{1j}$ gleich Eins. Also werden über k_j $\bar{\underline{a}}^*_{1j}$ mod E Gruppen der Ordnung s_j erzeugt. Weiterhin folgt daraus, daß dann und nur dann das Nullelement von $G_B{}^{-1}{}_Z$ mit k_j jeweils kleiner s_j erzeugt werden kann, wenn alle $k_j = 0$. Dies ist gleichbedeutend damit, daß über $\sum_j h_j \bar{\underline{a}}^*_{1j}$ dann und nur dann ganzzahlige Vektoren herstellbar sind, wenn h_j ganzzahliges Vielfaches von s_j ist.

(g) Ganzzahligkeitsbedingung als Kongruenz in $G_B{}^{-1}{}_Z$

Auf Basis dieser Definition läßt sich jetzt die (16) entsprechende Kongruenzbedingung aufstellen. Durch Linksmultiplikation von (1-α) mit $\underline{B}^{-1}_{Z1}$ erhalten wir:

(27) $\bar{x}_{BZ} + \underline{B}^{-1} \; \underline{N}_1 \; \bar{x}_N = \underline{B}^{-1} \; \bar{b}_1$.

Ganzzahliges $\bar{x}_{BZ}$ wird in $G_B{}^{-1}{}_Z$ auf das Nullelement abgebildet. Wir können deshalb folgern:

(28) Korollar zu Satz (16):

Kongruenzbedingung für ganzzahliges $\bar{x}_{BZ}$ auf Grundlage von $\underline{B}^{-1}_{Z1}$

Notwendige und hinreichende Bedingung für ganzzahliges $\bar{x}_{BZ}$ ist die Erfüllung der Kongruenz:

(α) $\nu_E(\underline{B}^{-1}_{Z1} \; \underline{N}_{Z1} \; \bar{x}_{NZ}) + \nu_E(\underline{B}^{-1}_{Z1} \; \underline{N}_{Q1} \; \bar{x}_{NQ}) = \nu_E(\underline{B}^{-1}_{Z1} \; \bar{b}_1)$

bzw.

(β) $\underline{B}^{-1}_{Z1} \; \underline{N}_{Z1} \; \bar{x}_{NZ} + \underline{B}^{-1} \; \underline{N}_{Q1} \; \bar{x}_{NQ} \equiv \underline{B}^{-1}_{Z1} \; \bar{b}_1 \pmod{E}$

Die Addition in System (28-α) ist innerhalb von $G_{B^{-1}Z}$ definiert und deshalb mod E. Verglichen mit Bedingung (1 -13-α) stellt (28) eine Aufbereitung des Ganzzahligkeitsproblems dar.

Einmal wurde der B_Q-Teil aus B_1 abgespalten, da $B_{Q1} = 0$. Dadurch reduzieren sich die Ausdrücke $B_1^* N_Z$ und $B_1^* N_Q$ auf die Matrizenprodukte $B_{=Z1}^{-1} N_{=Z1}$ und $B_{=Z1}^{-1} N_{=Q1}$, deren Matrizen geringere Dimensionen haben als die der erstgenannten Produkte.

Zum zweiten wird die Gruppenstruktur der Reste der Spalten $\bar{a}^*$ im Ausgangsproblem in der Formulierung als optimales LP-Tableau explizit dargestellt. Da jede Spalte von $B_{=Z1}^{-1}$ erzeugendes Element einer der n_{BZ} Untergruppen aus $G_{B^{-1}Z}$ ist [siehe (26)], stellen die Produkte $B_{=Z1}^{-1} N_{=Z1}$ und $B_{=Z1}^{-1} N_{=Q1}$ eine Zerlegung der Reste aller Spalten aus $B^{-1}N$ in eine Summe von Gruppenelementen aus jeder der erzeugenden Untergruppen von $G_{B^{-1}Z}$ gemäß (26) dar. Diese Aufgliederung kann man in analoger Weise algorithmisch nutzen wie das im weiteren mit der isomorphen Darstellung der GGLP-Gruppe entsprechend (16) geschieht. Jedoch wird im folgenden dieser Weg über $G_{B^{-1}Z}$ nicht beschritten, sondern allein mit der isomorphen Gruppe G_{BZ} gearbeitet. Beide Vorgehensweisen sind als gleichwertig anzusehen.

Wenn wir (28-α) weiter auflösen analog zu (29):

$$(29)\quad \nu_E(B_{=Z1}^{-1}\ N_{=Z1}\ \bar{x}_{NZ}) + \nu_E(B_{=Z1}^{-1}\ N_{=Q1}\ \bar{x}_{NQ}) = \nu_E(B_{=Z1}^{-1}\ \bar{b}_{=1})$$

$$\nu_E(N_{=Z1}^*\ \bar{x}_{NZ}) + \nu_E(N_{=Q1}^*\ \bar{x}_{NQ}) = \nu_E\ \bar{b}_{=1}^*$$

$$\sum_{j\in J_{NZ}} (\nu_E \bar{a}_{=1j}^*)\ x_j + \nu_E\Big(\sum_{j\in J_{NQ}} \bar{a}_{=1j}^*\ x_j\Big) = \nu_E\ \bar{b}_{=1}^*$$

wird besonders deutlich, daß für die gruppentheoretische Ganzzahligkeitsuntersuchung der GGLP-Aufgabe im LP-Optimum von den aktuellen Nebenbasisspalten $\bar{a}_j^*$ über $\nu_E \bar{a}_j^*$ $(j \in J_{NZ})$ nur die Informationen über die echten Bruchteile der Koeffizienten des aktuellen Simplextableaus weiterverarbeitet werden.

Da die Probleme der weiteren Behandlung des nichtganzzahligen Nebenbasisteils nur auf Grundlage der Kongruenz über G_{BZ} erörtert werden soll, wird die weitere Aufspaltung dieses Terms in (29) hier nicht weiter diskutiert.

(h) Resteigenschaften der Koeffizienten aus Problem (1 -13-α)

Der folgende Satz bietet eine Zusammenfassung der bisherigen Betrachtungen:

(30) Satz: Resteigenschaften im GGLP-Problem

Die Restvektoren $\nu_E \bar{a}^*_{1j}$ der Spaltenvektoren $\bar{a}^*_{1j} = B^*_1 \bar{a}_j$ aus System (1 -13-α) mit $\bar{a}_j \in Z^m$ bilden die endliche Abel'sche Gruppe $G_{B^{-1}Z}$ der Ordnung $|\det B_{Z1}|$, und es gilt:

$$G_{B^{-1}Z} \cong G(B_{Z1}^{-1})/G(E)$$

$$\cong G_{BZ} \cong G(E) / G(B_{Z1})$$

Beweis:

Die Isomorphie von G_{BZ} und $G(E)/G(B_{Z1})$ wurde unter (c) aufgezeigt, die Isomorphie von $G_{B^{-1}Z}$ und $G(B_{Z1}^{-1})/G(E)$ im Abschnitt (f). Es bleibt zu zeigen, daß:

- (α) die Gruppe aller Restvektoren $\{\nu_E \bar{a}^*_{1j}\} = G_{B^{-1}Z}$ und
- (β) $G_{BZ} \cong G_{B^{-1}Z}$, woraus die anderen Kongruenzen dann folgen.

Zu (α): Aus (231-17) folgt:

(31) $B^{-1} = \underline{B}^{-1} \; P = Q \; \bar{C}^{-1} \; P.$

Insbesondere gilt also [siehe (231-24)]:

(32) $B_1^* = [\underline{B}_{Z1}^{-1}, \; 0] \; P.$

Daraus sieht man, daß alle Vektoren $\bar{a}_{1j}^* = B_1^* \; \bar{a}_j$ durch die ganzzahligen Koordinaten $P \; \bar{a}_j$ bezüglich der Basis $\underline{B}_{Z1}^{-1}$ dargestellt werden. Wegen der 0-Matrix in (32) kann man zusammenfassen zu:

(33) $B_1^* \; \bar{a}_j = \underline{B}_{Z1}^{-1} \; (P_1 \; \bar{a}_j) = \underline{B}_{Z1}^{-1} \; \underline{\bar{a}}_{1j} = \bar{a}_{1j}^* \; .$

Da die Vektoren $\bar{a}_{1j}^*$ also immer als ganzzahlige Vielfache der Spalten von $\underline{B}_{Z1}^{-1}$ darstellbar sind, muß gelten:

(34) $\nu_E \bar{a}_{1j}^* \in G_{B^{-1}Z}.$

Wegen seiner Unimodularität ist P Gitterbasis von Z^m. Über $P \; \bar{a}_j$ mit $\bar{a}_j \in Z^m$ müssen deshalb alle Vektoren aus Z^m gebildet werden können und mithin über $P_1 \; \bar{a}_j = \underline{\bar{a}}_{1j}$ alle Vektoren aus $Z^n BZ$. Also gilt nicht nur (34), sondern darüber hinaus werden über (33) alle Gruppenelemente von $G_{B^{-1}Z}$ erzeugt.

Zu (β):

Wir haben schon gezeigt, daß G_{BZ} und $G_{B^{-1}Z}$ als direkte Summe einer gleichen Zahl zyklischer Untergruppen mit jeweils der Ordnung s_i darstellbar sind und deshalb auch die gleiche Ordnung besitzen [siehe (12) und (26)].

Ein Isomorphismus u_{BZ}^{*} zwischen beiden Restklassenmoduln ist durch folgende eineindeutige Abbildung ihrer Elemente aufeinander gegeben:

- Zerlege jedes Element $\bar{g} \in G_{BZ}$ und $\bar{g}^* \in G_{B^{-1}Z}$ in seine (eindeutige) Darstellung gemäß (12) bzw. (26).
- Bilde die Elemente der n_{BZ} Untergruppen aus (12) bzw. (26) eineindeutig auf Elemente der gleichen Ordnung in der korrespondierenden Untergruppe des anderen Moduls ab.

Solche Elemente gleicher Ordnung sind dadurch bestimmt, daß man jeweils von den in (12) und (26) gewählten Repräsentanten $\bar{e}_j$ bzw. $\nu_E \bar{a}^*_{1j}$ $(j = 1,\ldots,n_{BZ})$ ausgeht und für jedes Element dieser zyklischen Untergruppen die Abbildung wählt:

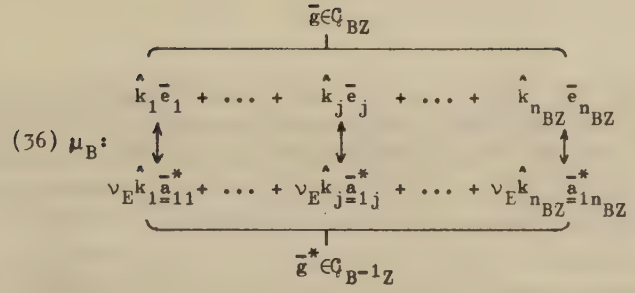
$$(35)\quad \hat{k}_j \bar{e}_j \in \{ k_j \bar{e}_j \} \subset G_{BZ}$$

$$\updownarrow$$

$$\nu_E \hat{k}_j \bar{a}^*_{1j} \in \{\nu_E k_j \bar{a}^*_{1j} \} \subset G_{B^{-1}Z}$$

$$(0 \le k_j, \hat{k}_j < s_j \; ; \; j = 1,\ldots, n_{BZ})$$

g und g* werden dadurch eineindeutig aufeinander abgebildet:



Damit ist Satz (30) bewiesen.

*****

Zur Interpretation sollen einige der in diesem Satz enthaltenen Aussagen besonders herausgestellt werden.

Wenn z.B. erstens die Elementarteiler von $\underset{=}{B}_{Z1}$, also die s_i aus $\underset{=}{S}_{Z1}$, die spezielle Form haben:

(37) $s_i = 1 \quad (i = 1,\ldots,n_{BZ}-1)$

$$s_{n_{BZ}} = |\det \underset{=}{B}_{Z1}|,$$

läßt sich der Restklassenmodul $\mathfrak{G}_{B^{-1}Z}$ nach (26) in die direkte Summe von $n_{BZ}-1$ Untergruppen der Ordnung 1 und eine Untergruppe der Ordnung $|\det B_{Z1}|$ zerlegen. Mit anderen Worten ist die gesamte Gruppe der Reste $\nu_E \bar{a}^*_{1j}$ zyklisch und erzeugbar durch $\bar{\bar{a}}^*_{=1 n_{BZ}}$. Die ersten $(n_{BZ}-1)$ Untergruppen aus (26) enthalten nur das Einselement, den Nullvektor also; korrespondierend ist die Inverse $\underset{=}{B}^{-1}_{Z1}$ in den ersten $(n_{BZ}-1)$ Spalten ganzzahlig.

Da zum zweiten etwa beim klassischen Transportproblem die mit zulässigen Eckenlösungen korrespondierende LP-Basis B_{Tr} immer unimodular ist, sind alle Elementarteiler aus B_{Tr} gleich Eins, die Inverse B_{Tr}^{-1} ganzzahlig, entsprechend die Koeffizienten a^*_{ij} der Simplex-Tableaus ganzzahlig und die Basislösungen ganzzahlig, sofern auch $\bar{b}$ ganzzahlig ist.

Drittens schließlich, gilt allgemein, daß man bei GGLP-Problemen die Ganzzahligkeitsreste der Tableau-Koeffizienten und Basisvariablen in eine Summe echter Brüche mit sich teilenden Nennern s_i zerlegen kann, wie sich aus (26) ersehen läßt. Zufällig kann die LP-Basislösung eines GGLP-Problems für die ganzzahlige Basisvariable $\bar{x}_{BZ}$ ganzzahlig sein, wenn die rechte Seite $\bar{b}$ des Ausgangsproblems gerade derart beschaffen ist, daß $\bar{b}_1 = P_1 \bar{b}$ Komponenten b_i enthält, die jeweils Vielfache von s_i^{-1} sind, oder mit anderen Worten: $\nu_{s_i=1} \bar{b}_1 = \bar{0} \in \mathfrak{G}_{BZ}$. Entsprechend kann zufällig eine Koeffizientenspalte $\bar{a}^*_{ij}$ aus System (1 -13-a) ganzzahlig sein, wenn die a_j die gleichen Merkmale haben.

(i) Zusammenfassung

Die Ergebnisse dieses Kapitels sollen in einer für die weiteren Betrachtungen zweckmäßigen Weise zusammengefaßt werden.

Die Spalten $\bar{a}_j$ aus $[B,N_Z]$ gemäß System (1 -7) werden auf Gruppenelemente $\bar{g}_i$ des zur Faktorgruppe $\mathfrak{G}(E)/\mathfrak{G}(B_{Z1})$ isomorphen Restklassenmoduls $\mathfrak{G}_{BZ}$ homomorph abgebildet. Dadurch werden alle Restinformationen des ganzzahligen Teils $\bar{x}_{BZ}$ der LP-Basis-Variablen $\bar{x}'_B = [\bar{x}'_{BZ}, \bar{x}'_{BQ}]$ verarbeitet. Für die Ganzzahligkeitsbetrachtung ist es hinreichend mit den Bildern $\bar{g}_i$ der Spalten $\bar{a}_j$ innerhalb von $\mathfrak{G}_{BZ}$ zu operieren.

In analoger Weise entspricht jeder Spalte $\bar{a}_j$ aus $[B,N_Z]$ ein Gruppenelement $\bar{g}_i^* \in G_B{}^{-1}{}_Z \cdot G_B{}^{-1}{}_Z$ ist isomorph G_{BZ}. Wenn für die weiteren Untersuchungen nicht die Gruppe aller Reste $\nu_E \bar{a}^*_{1j}$, also $G_B{}^{-1}{}_Z$, direkt zugrundegelegt wird, so liegt das u.a. in der größeren Übersichtlichkeit der Gruppe G_{BZ} gegenüber $G_B{}^{-1}{}_Z$ und in der Beschränkung auf ganze Zahlen und ganzzahlige Operationen bei der weiteren Arbeit innerhalb G_{BZ}.

Die Abbildungen lauten zusammengefaßt ($j \in J_B \cup J_{NZ}$):

$$
\begin{array}{lccccc}
(38\text{-}\alpha) & \bar{a}_j & \xrightarrow{P_1} & \bar{a}_{1j} & \xrightarrow{\nu_S} & \bar{g}_i \in G_{BZ} \quad \cong G(E)/G(\underline{B}_{Z1}) \\
 & & & \Big\downarrow \underline{B}_{Z1}^{-1} & & \Big\uparrow u_B \quad \cong \qquad \cong \\
(38\text{-}\beta) & \bar{a}_j & \xrightarrow{B_i^*} & \bar{a}^*_{1j} & \xrightarrow{\nu_E} & \bar{g}_i^* \in G_B{}^{-1}{}_Z \quad \cong G(\underline{B}_{Z1}^{-1})/G(E)
\end{array}
$$

Die Transformation $P_1 \, \underline{B}_{Z1}^{-1}$ anstelle von B_i^* wurde nur eingeführt, um nach (36) eine eineindeutige Zuordnung der Elemente $\bar{g}_i$ und $\bar{g}_i^*$ zu ermöglichen.

Die Homomorphismen (38-α) und (38-β), zusammengefaßt zu:

(39-α) $\nu_S \, P_1$

(39-β) $\nu_E \underline{B}_{Z1}^{-1} \, P_1$

übertragen Spalten $\bar{a}_j$ aus B in die Einselemente $\bar{0} \in G_{BZ}$ bzw. $\bar{0} \in G_B{}^{-1}{}_Z$. Die Spalten $\bar{a}_j$ aus N_Z werden über (39-α) bzw.

(39-ß) als Elemente einer Restklasse identifiziert und auf das korrespondierende Element $\bar{g}_i$ bzw. $\bar{g}_i^*$ abgebildet. Die Gesamtheit der Spalten aus N_Z formt damit den Komplex $K_{BZ}^{NZ} \subset \mathfrak{G}_{BZ}$; K_{BZ}^{NZ} ist allgemein nicht Untergruppe von $\mathfrak{G}_{BZ}$. N_Q schließlich wird in der unter Abschnitt (e) zusammengefaßten Weise, die im weiteren noch näher erläutert wird, auf den Komplex $K_{BZ}^{NQ} \subset \mathfrak{G}_{BZ}$ abgebildet.

Diese Abbildungen lauten insgesamt:

(40)

$$B \xrightarrow{\nu_S P_1} \bar{0} \subset \mathfrak{G}_{BZ}$$

$$N_Z \xrightarrow{\nu_S P_1} K_{BZ}^{NZ} \subset \mathfrak{G}_{BZ}$$

$$N_Q \xrightarrow{P_1} \underset{\sim}{N}_{Q1} \xrightarrow{\tau_{NQ}^{a}} [\bar{\underset{\sim}{a}}_{11}, \ldots, \bar{\underset{\sim}{a}}_{1p}] = K_{BZ}^{NQ} \subset \mathfrak{G}_{BZ}$$

(321-d) (242-g)

Diese Zuordnung der Variablen unseres GGLP-Problems zu Gruppenelementen aus $\mathfrak{G}_{BZ}$ werden wir später ausnutzen, um auf Basis der Kongruenz (16) Optimierungsüberlegungen anzustellen.

(j) Zahlenbeispiel

Zur Bestimmung des Gruppenaufbaus von $\mathfrak{G}_{BZ}$ und zur Abbildung von $A = [B, N_Z, N_Q]$ auf $\mathfrak{G}_{BZ}$ benötigen wir die Transformation P_1 und zur Festlegung von ν_S die Elementarteiler aus $\bar{S}_{Z1}$.

Beide Matrizen wurden schon im letzten Kapitel (231-Tab. 5) bestimmt:

$$(41)\quad P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 5 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 11 & -7 \end{bmatrix}$$

$$(42)\quad \bar{S}_{Z1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Der unendliche Modul $G(B_{Z1})$ lautet nach (40):

$$G(B_{Z1}) = \left\{\ldots,\begin{bmatrix}-2\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix},\ \ldots\right\}$$

$$\oplus \left\{\ldots,\begin{bmatrix}0\\-3\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-6\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\6\\0\end{bmatrix},\ \ldots\right\}$$

$$\oplus \left\{\ldots,\begin{bmatrix}0\\0\\-12\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\-6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\12\end{bmatrix},\ \ldots\right\}$$

Die Faktorgruppe $G(E)/G(B_{Z1})$ hat die Ordnung

$$(44)\quad \prod_{i=1,2,3} s_i = 18$$

Die dazu isomorphe Gruppe G_{BZ} besteht aus den 18 Vektoren:

$$(45)\ \mathcal{G}_{BZ} = \left\{ \begin{matrix}0\\0\end{matrix}[0], \begin{matrix}0\\1\end{matrix}[0], \begin{matrix}0\\2\end{matrix}[0], \begin{matrix}0\\3\end{matrix}[0], \begin{matrix}0\\4\end{matrix}[0], \begin{matrix}0\\5\end{matrix}[0], \right.$$

$$\begin{matrix}0\\0\end{matrix}[1], \begin{matrix}0\\1\end{matrix}[1], \begin{matrix}0\\2\end{matrix}[1], \begin{matrix}0\\3\end{matrix}[1], \begin{matrix}0\\4\end{matrix}[1], \begin{matrix}0\\5\end{matrix}[1],$$

$$\left. \begin{matrix}0\\0\end{matrix}[2], \begin{matrix}0\\1\end{matrix}[2], \begin{matrix}0\\2\end{matrix}[2], \begin{matrix}0\\3\end{matrix}[2], \begin{matrix}0\\4\end{matrix}[2], \begin{matrix}0\\5\end{matrix}[2] \right\} .$$

Diese Gruppe wurde oben schon in Kap. 221 in einem allgemeinen Beispiel als Gruppe $\mathcal{G}_1$ eingeführt; da die erste Vektorkomponente ohnehin immer Null ist, wurde sie dort weggelassen. In gleicher Weise entspricht $\mathcal{G}(\underline{\underline{B}}_{Z1})$ nach (43) der oben definierten Gruppe $\mathcal{G}_6$, wobei gleichfalls die erste Vektorkomponente weggelassen wurde, da sie - korrespondierend - immer Vielfaches von 1 ist.

In $\mathcal{G}_{BZ}$ ist Addition mod $\bar{\bar{S}}_{Z1}$ erklärt. Die Faktorisierung von $\mathcal{G}(E)$ nach $\mathcal{G}(\underline{\underline{B}}_{Z1})$ wurde unter (221-f) schon ausführlich interpretiert und $\mathcal{G}_{BZ}$ graphisch veranschaulicht. Dem soll hier nichts mehr hinzugefügt werden.

Die Gruppe der möglichen Reste von $\bar{x}_{BZ}$, also $\mathcal{G}_{B^{-1}Z}$, läßt sich nach (25) und (26) aus der 2. und 3. Spalte von $\underline{\underline{B}}^{-1}_{Z1}$ als erzeugende Elemente von $\mathcal{G}_{B^{-1}Z}$ aufbauen. Die 1. Spalte scheidet aus, da in unserem Zahlenbeispiel $s_1 = 1$, wie aus Tab. 5 hervorgeht.

$\underline{\underline{B}}^{-1}_{Z1}$ ist schon unter (231-34) wiedergegeben; danach lautet $\mathcal{G}_{B^{-1}Z}$ jetzt:

$$(46)\ G_B{}^{-1}{}_Z = \Big\{ \begin{matrix} .00 \\ [.00] \\ .00 \end{matrix}, \begin{matrix} .8\underline{3} \\ [.5\underline{0}] \\ .1\underline{6} \end{matrix}, \begin{matrix} .6\underline{6} \\ [.0\underline{0}] \\ .3\underline{3} \end{matrix}, \begin{matrix} .50 \\ [.50] \\ .50 \end{matrix}, \begin{matrix} .3\underline{3} \\ [.0\underline{0}] \\ .6\underline{6} \end{matrix}, \begin{matrix} .1\underline{6} \\ [.5\underline{0}] \\ .8\underline{3} \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} .00 \\ [.3\underline{3}] \\ .00 \end{matrix}, \begin{matrix} .8\underline{3} \\ [.8\underline{3}] \\ .1\underline{6} \end{matrix}, \begin{matrix} .6\underline{6} \\ [.3\underline{3}] \\ .3\underline{3} \end{matrix}, \begin{matrix} .50 \\ [.83] \\ .50 \end{matrix}, \begin{matrix} .3\underline{3} \\ [.3\underline{3}] \\ .6\underline{6} \end{matrix}, \begin{matrix} .1\underline{6} \\ [.8\underline{3}] \\ .8\underline{3} \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} .00 \\ [.6\underline{6}] \\ .00 \end{matrix}, \begin{matrix} .8\underline{3} \\ [.1\underline{6}] \\ .1\underline{6} \end{matrix}, \begin{matrix} .6\underline{6} \\ [.6\underline{6}] \\ .3\underline{3} \end{matrix}, \begin{matrix} .50 \\ [.16] \\ .50 \end{matrix}, \begin{matrix} .3\underline{3} \\ [.6\underline{6}] \\ .6\underline{6} \end{matrix}, \begin{matrix} .1\underline{6} \\ [.1\underline{6}] \\ .8\underline{3} \end{matrix} \Big\}$$

Wie man zum Vergleich aus (1 -15) und dem Simplex-Tableau Tab. 3 ersieht, lassen sich die dort in den ersten drei Zeilen auftretenden Reste mod 1 immer mit einem Gruppenelement aus $G_B{}^{-1}{}_Z$ identifizieren.

Die Transformation der Spalten $\bar{a}_j$ aus A in Gruppenelemente aus G_{BZ} wird wie folgt durchgeführt. Zunächst wird A über P_1 transformiert $A \rightarrow \underline{\underline{A}}_1$. Dann werden die Vektoren $\bar{\underline{a}}_{1j}$ aus $[\underline{\underline{B}}_{Z1}, \underline{\underline{B}}_{Q1}, \underline{\underline{N}}_{Z1}]$ mod $\bar{S}_{Z1}$ reduziert. Wir erhalten dadurch K_{BZ}^{NZ}. Diese Operationen sind in Tab. 6 zusammengefaßt. Wie man sieht, ist z.B. K_{BZ}^{NZ} nicht Untergruppe von G_{BZ}.

Die weitere Behandlung von $\underline{\underline{N}}_{Q1}$ ist Gegenstand des nächsten Kapitels. Oben wurde schon darauf hingewiesen (1 -g), daß einer der später vorgestellten Optimierungsalgorithmen parametrischen Charakter in bezug auf die rechte Seite des untersuchten GGLP-Problems besitzt. Im Zahlenbeispiel werden wir acht alternative rechte Seiten verwenden, um den Lösungsmechanismus zu verdeutlichen. Diese verschiedenen $\bar{b}_j$ sollen

Matrizen/ Mengen	Variablennummern
	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
$P_1 A$	$[\ P_1 B_Z\ ,\ P_1 B_Q\ ,\ P_1 N_Z\ ,\ P_1 N_Q\ ]$
$= \underline{A}_1$	$[\ \underline{B}_{Z1}\ ,\ \underline{B}_{Q1}\ ,\ \underline{N}_{Z1}\ ,\ \underline{N}_{Q1}\ ]$
	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 0 & -19 & -12 & -1 & 1 & 0 & -5 & -3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & -72 & -2 & -4 & 2 & -1 & 11 & -7 & 2 & 16 \end{bmatrix}$
$\nu_S[\underline{B}_1, \underline{N}_{Z1}]$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 2 & 5 & 1 & 5 \end{bmatrix}$
K_{BZ}^{NZ}	$\left\{ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [2],[0],[2],[1],[0],[1],[0] \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 5 & 1 & 5 \end{matrix} \right\}$

Tab. 6: Transformation der Spalten $\bar{a}_j$ aus $[B, N_Z]$ in Gruppenelemente von G_{BZ}

hier vorgestellt und gleichfalls in Elemente des Restklassenmoduls G_{BZ} transformiert werden. Die entsprechenden Operationen sind in Tab. 7 durchgeführt.

	$\bar{b}_1$	$\bar{b}_2$	$\bar{b}_3$	$\bar{b}_4$	$\bar{b}_5$	$\bar{b}_6$	$\bar{b}_7$	$\bar{b}_8$
$\bar{b}_j$	2254	2254	2255	2255	2255	2254	2255	2255
	3500	3502	3502	3503	3502	3502	3502	3507
	5244	5244	5244	5244	5244	5240	5245	5233
	1933	1933	1933	1933	1933	1933	1933	1933
	3460	3460	3458	3458	3460	3460	3458	3460
$P_1 \bar{b}_j = \bar{b}_{1j}$	321	321	322	322	322	321	322	322
	531	533	538	539	532	533	538	537
	271	275	285	287	271	271	286	270
$\nu_{S=1} \bar{b}_{1j}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	2	1	2	1	2	1	0
	1	5	3	5	1	1	4	0

Tab. 7: Transformation alternativer rechter Seiten $\bar{b}_j$ in Gruppenelemente von G_{BZ}

Die diesen rechten Seiten zugehörigen LP-Basislösungen entsprechend System (1 -13) sind für die gewählte Basis B alle zulässig und führen deshalb zu optimalen LP-Lösungen. Diese Lösungen werden erst später benötigt (Kap. 32). Wie schon hier ersichtlich wird, ist die optimale LP-Lösung für $\bar{b}_8$ gleichzeitig optimale GGLP-Lösung, da $\bar{b}_8$ auf das Einselement von G_{BZ} abgebildet wird.

233. Kongruenz für das rein-ganzzahlige Problem als Spezialfall des gemischt-ganzzahligen Problems

(a) Bei RGLP-Problemen muß Kongruenz (232-16) für alle Basisvariablen des LP-Optimums entsprechend Aufgabe (1 - 13) beachtet werden. Diese Bedingung kann bei GGLP-Problemen zufällig auch eintreten, wenn im LP-Optimum die LP-Basislösung nur Variable x_j mit $j \in J_Z$ enthält. Deshalb gelten die weiteren Betrachtungen für diese GGLP-Variante gleichermaßen wie für das RGLP-Problem.

Im RGLP-Fall wird das gesamte Nebenbedingungssystem $\underline{A}\ \bar{x} = \bar{b}$ strukturiert, um explizit Informationen über die Resteigenschaften von $B^{-1}\ \underline{A}\ \bar{x} = B^{-1}\ \bar{b}$ über Herleitung des Restklassenmoduls G_{BZ} zu gewinnen (GOMORY [1965; 1969]; HU [1969, Kap. 19.1]). In dem von uns betrachteten allgemeinen GGLP-Problem ist diese RGLP-Strukturierung als Spezialfall enthalten. Von Algorithmus (2) ist entsprechend nur der Schritt (II) auszuführen.

(b) Die Ordnung der Gruppe $G_B = G_{BZ}$ ist beim RGLP-Problem:

$$(1)\quad |G_B| = |\det B| = \prod_{i=1,\ldots,m} s_i,$$

wobei die s_i die Elementarteiler der gesamten Basis B sind. Im GGLP-Fall spalten wir durch eine mit Algorithmus (2) ermittelte Transformation P in bestimmter Weise den nichtganzzahligen Basisteil B_Q ab. Die Ordnung des Restklassenmoduls G_{BZ} ist hier:

$$(2)\quad |G_{BZ}| = |\det \underline{B}_{Z1}| = |\det P_1\ B_Z| = \prod_{i=1,\ldots,n_{BZ}} s_i;$$

die s_i sind jetzt Elementarteiler von $\underline{B}_{Z1}$. Dieses Ergebnis kann man auch auf folgendem Weg erhalten, der den Einfluß des nichtganzzahligen Teils B_Q deutlich macht.

Die Informationen für die Abfolge der einzelnen Schritte von Algorithmus (2) werden aus der Matrix C gewonnen, die aus B durch laufende Umwandlungen entsteht. Wegen der Unimodularität dieser Transformationen sind C und B unimodular äquivalent. Nach Ende des Algorithmus (2) hat C die Form $\bar{C}$ [siehe (231-8)]. $\bar{C}_{Q2}$ ist dabei in Diagonalform mit den Elementen c_{ii} $(i = 1,\ldots,n_{BQ})$ auf der Hauptdiagonalen. Die c_{ii} sind nicht die Elementarteiler von B_Q; zu deren Ermittlung müßte man auf $\bar{C}_{Q2}$ nur noch die Schritte (VI) bis (VIII) von Algorithmus (I) anwenden. Daraus ersieht man aber sofort, daß:

$$(3)\qquad \prod_{i=1,\ldots,n_{BQ}} c_{ii} = \prod_{i=1,\ldots,n_{BQ}} s_i$$

gelten muß; hierbei sind die s_i Elementarteiler aus B_Q. Nach (222-14) folgt daraus:

$$(4)\qquad \prod_{i=1,\ldots,n_{BQ}} c_{ii} = \sigma_{n_{BQ}},$$

wobei $\sigma_{n_{BQ}}$ Determinantenteiler aus B_Q ist, genauer, der GGT aller n_{BQ}-zeiligen Unterdeterminanten aus B_Q.

Wegen der speziellen Struktur von $\underline{\underline{B}}$ und der Unimodularität der Umwandlungsschritte muß gelten:

$$(5)\qquad \begin{aligned} |\det B| = |\det \underline{\underline{B}}| &= |\det \underline{\underline{B}}_{Z1}| \cdot |\det \underline{\underline{B}}_{Q2}| \\ &= |\det \underline{\underline{B}}_{Z1}| \cdot |\det \bar{C}_{Q2}| \\ &= |\det B_{Z1}|\sigma_{n_{BQ}} \end{aligned}$$

In Verbindung mit (2) können wir aus (5) folgenden Satz ableiten:

(6) Satz: Zahl der Restklassen im GGLP-Problem

Die Gruppenordnung des Restklassenmoduls G_{BZ} ergibt sich als Quotient aus der Determinante der LP-Basis B und dem GGT aller n_{BQ}-reihigen Unterdeterminanten von B_Q aus B:

$$|G_{BZ}| = \frac{|\det B|}{\sigma_{n_{BQ}}}$$

*****

Für den RGLP-Fall ist B_Q nicht definiert; sinngemäß ist für (6) $\sigma_{n_{BQ}}$ auch nicht definiert und $|G_{BZ}| = |\det B|$.

(c) Beim Vergleich der GGLP- und der RGLP-Strukturierung mit Algorithmus (2) ist weiterhin der folgende Sachverhalt interessant. Die Resteigenschaften für den ganzzahligen Basisteil eines GGLP-Problems werden nicht allein durch den zugeordneten Teil B_Z von B bestimmt. Dies gilt sowohl für die Zahl der Restklassen als auch die Struktur des Restklassenmoduls G_{BZ}.

G_{BZ} ist allein durch B_{Z1} festgelegt; B_{Z2} wird dabei in keiner Weise berücksichtigt. So wird insbesondere im allgemeinen immer gelten:

(7) $|G_{BZ}| \neq \sigma_{n_{BZ}}$,

wobei $\sigma_{n_{BZ}}$ entsprechend der o.a. Definition von $\sigma_{n_{BQ}}$ als GGT aller n_{BZ}-zeiligen Unterdeterminanten von B_Z definiert ist. Für unser Zahlenbeispiel ergibt sich etwa, wenn man $\bar{C}_Z$ aus Tab. 5 weiter umrechnet, um dadurch die Elementarteiler s_i (i = 1,2,3) und den Determinantenteiler σ_3 aus B_Z zu erhalten:

$$(8)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Daß die Struktur von G_{BZ} nicht durch B_Z determiniert ist, geht schon aus diesen Betrachtungen über die Zahl der Elemente von G_{BZ} hervor.

Wie man darüber hinaus aus (8) ersieht, sind z.B. die Elementarteiler für B_Z $s_i=1$ $(i = 1,2,3)$, während sich für $\underset{=}{B}_{Z1}$ $s_1 = 1$, $s_2 = 3$ und $s_3 = 6$ ergab.

G_{BZ} ist nicht durch $\underset{=}{B}_Z$, sondern die Teilmatrix $\underset{=}{B}_{Z1}$ determiniert, die ein Ergebnis der Transformation:

$$(9)\quad B_Z \overset{P_1}{\rightarrow} \underset{=}{B}_{Z1}$$

darstellt. Damit ist die Gestalt von $\underset{=}{B}_{Z1}$ abhängig von der Beschaffenheit von B_Q. Denn P_1, das über P_1 B_Z den Ausschnitt $\underset{=}{B}_{Z1}$ aus B_Z festlegt, wird durch den Schritt (I) von Algorithmus (2) mitbestimmt. Die Transformationen in Schritt (I) hängen jedoch allein von B_Q ab.

Welche Beziehungen im einzelnen zwischen B_Z und B_Q gegeben sind, werden wir hier nicht weiter vertiefen, da wir die Ergebnisse einer solchen Analyse im folgenden nicht benötigen. In wenigen Worten läßt sich dieses Problem auch kaum umreißen. Wir wollen es deshalb neben der ausführlichen Untersuchung der Gitterbasiswechsel in Kap. 231 an dieser Stelle bei der pauschalen Interpretation belassen, daß sich in $\underset{=}{B}_{Z1}$ Informationen über die relative Lage der Gitter $G(B_Z)$ und $G(B_Q)$ zueinander im gemeinsamen Obergitter $G(E)$ widerspiegeln.

24. Ableitung ganzzahliger Vektoren aus dem nichtganzzahligen Nebenbasisteil

241. Problemstellung

(a) Die Aufgabenstellung dieses Kapitels wurde oben schon angedeutet (232-e). Wir hatten dort herausgestellt, daß als notwendige Bedingung für zulässige Lösungen unseres GGLP-Problems entsprechend Kongruenz (232-16) erfüllt sein muß:

$$(1)\quad \underline{\underline{N}}_{Q1}\ \bar{\underline{x}}_{NQ} = \bar{\underline{z}} \in Z^n BZ \quad (\bar{\underline{x}}_{NQ} \in Q^n{}_{NQ})$$

Eine optimale GGLP-Lösung kann also nur vorliegen, wenn die rationale Nebenbasisvariable $\bar{\underline{x}}_{NQ}$ derart festgelegt wird, daß sie die Spalten aus $\underline{\underline{N}}_{Q1}$ zu einem ganzzahligen Vektor linear kombiniert.

Wir werden zunächst untersuchen, welche Resteigenschaften mod E die Vektoren $\bar{\underline{x}}_{NQ}$ aus (1) haben. Dies besagt, daß wir Vektoren $\bar{\underline{x}}_{NQ}$ und $\underline{\underline{x}}_{NQ}$ nur unterscheiden wollen, wenn gilt:

$$(2\text{-}\alpha)\quad \bar{\underline{x}}_{NQ} \not\equiv_{\nu_E} \bar{\underline{x}}_{NQ}\ .$$

Wie wir im einzelnen noch sehen werden, soviel sei an dieser Stelle zusammenfassend vermerkt, kommt nur eine endliche Menge von Vektoren $\nu_E\ \bar{\underline{x}}_{NQ}$ zur Lösung von System (1) in Frage. Diese Menge bildet den Komplex K_{NQ} einer

endlichen Gruppe $\mathcal{G}_{NQ}^{OB}$, die aus n_{NQ}-Vektoren $\nu_E \bar{x}_{NQ}$ besteht; K_{NQ} wird in bestimmter Weise durch eine Menge einzelner Gruppen $\mathcal{G}_{NQ}^{1}$ festgelegt.

Die Vektoren $\nu_E \bar{x}_{NQ} \in K_{NQ}$ haben die Eigenschaft, die Spalten von $\underline{N}_{Q1}$ zu $\underline{\bar{z}}$ gemäß (1) linear zu kombinieren. Aus K_{NQ} kann man irgendein $\bar{x}_{NQ}^{k}$ aus der unendlichen Zahl aller Vektoren $\bar{x}_{NQ} \geq \bar{0}$ ableiten, die ganzzahliges $\underline{\bar{z}}$ erzeugen: entweder ist $\nu_E \bar{x}_{NQ}^{k} = \bar{x}_{NQ}^{k} \in K_{NQ}$ oder $\bar{x}_{NQ}^{k}$ unterscheidet sich in seinen Komponenten nur durch ganzzahlige Differenzen von $\nu_E \bar{x}_{NQ}^{k}$.

Die Identifizierung der endlichen Zahl aller Vektoren $\nu_E \bar{x}_{NQ}$ bildet einen Untersuchungsgegenstand dieses Kapitels. Damit ist gleichzeitig die Struktur aller Lösungen $\bar{x}_{NQ}$ bekannt, die für (1) überhaupt in Frage kommen und in der optimalen GGLP-Lösung auftreten können; von möglichen Mehrfachoptimalitäten sei dabei abgesehen.

(b) Da wir GGLP-Algorithmen vorstellen werden, die auf Grundlage der Gruppe $\mathcal{G}_{BZ}$ arbeiten, muß man weiterhin fragen, welche Elemente von $\mathcal{G}_{BZ}$ durch die Elemente von K_{NQ} erzeugt werden können. Allgemein gilt dazu:

$$(3)\quad \nu_S \left(\underline{N}_{Q1}\, \nu_E \bar{x}_{NQ}\right) \in \mathcal{G}_{BZ}^{NQ} \subset \mathcal{G}_{BZ} \quad (\nu_E \bar{x}_{NQ} \in K_{NQ}).$$

Oben wurde schon erwähnt (232-e), daß über den nichtganzzahligen Nebenbasisteil der Komplex $K_{BZ}^{NQ} \subset \mathcal{G}_{BZ}$ ableitbar ist. Durch Anwendung der Gruppenaddition mod $\bar{S}_{Z1}$ auf die Elemente dieses Komplexes wird eine Untergruppe $\mathcal{G}_{BZ}^{NQ}$ von $\mathcal{G}_{BZ}$ erzeugt. Je nach Beschaffenheit von $\underline{N}_{Q1}$ können über (3) entweder alle Elemente von $\mathcal{G}_{BZ}$ dargestellt werden oder aber ein Teil. Nur im letzten Fall ist $\mathcal{G}_{BZ}^{NQ}$ echte Untergruppe.

Ausgangspunkt dieser Betrachtungen ist die numerische Ermittlung von K_{NQ}. Algorithmische Probleme der Bestimmung dieses Komplexes sind deshalb ein weiteres Thema dieses Kapitels.

242. Die Erzeugung ganzzahliger Vektoren durch Linearkombination ganzzahliger Vektoren mit rationalen Linearfaktoren

(a) Einschränkung der Zahl untersuchter Linearfaktoren

Hier soll untersucht werden, in welcher Weise durch die rationale Nebenbasisvariable $\bar{x}_{NQ}$ gemäß (241-1) ganzzahlige Vektoren $\bar{z}$ erzeugt werden können. Eine wichtige Beschränkung der Zahl möglicher Lösungen für (241-1) resultiert daraus, daß nur solche Vektoren $\bar{x}_{NQ}$ betrachtet werden zu brauchen, bei denen maximal n_{BZ} Komponenten positiv sind. Diese Restriktion wird nur wirksam, wenn $n_{NQ} > n_{BZ}$.

Der Grund für diese Einschränkung läßt sich aus dem sog. "Eckentheorem" der LP-Theorie herleiten: wenn ein LP-Problem in Gleichungsform überhaupt eine optimale Lösung besitzt, ist immer auch eine Basislösung optimal. Demnach braucht man zur Ableitung einer Optimallösung nur unter solchen Lösungen zu suchen, bei denen maximal so viele Variable positiv sind, wie die Zahl der Nebenbedingungen beträgt.

Hier liegt ein Optimierungsproblem dieser Struktur vor. Wie oben schon angedeutet wurde (1 -f) und später noch genauer gezeigt wird, sind zur Ableitung einer optimalen GGLP-Lösung die Nebenbasisvariablen in kostengünstigster Weise derart positiv zu setzen, daß sie die Ganzzahligkeitsreste der optimalen LP-Basis eliminieren. Für das Teilproblem des rationalen Nebenbasisteils besagt dies, daß für die kostengünstigste Linearkombination eines ganzzahligen Vektors $\bar{z}$ gemäß:

(1) $\bar{c}'^{*}_{NQ}\ \bar{x}_{NQ} \rightarrow \text{Min}$

$$\underline{\underline{N}}_{Q1}\ \bar{x}_{NQ} = \bar{\underline{z}}$$

$$\bar{x}_{NQ} \geq \bar{0}$$

nur solche $\bar{x}_{NQ}$ untersucht werden zu brauchen, bei denen mindestens $n_{NQ}-n_{BZ}$ Komponenten gleich Null sind.

An dieser Stelle wird noch nicht deutlich, welches $\bar{\underline{z}}$ nach (1) bei einer optimalen GGLP-Lösung erzeugt wird und warum. Eines läßt sich jedoch hier schon festhalten: um eine zulässige GGLP-Lösung zu erhalten, muß irgendein ganzzahliger Vektor $\bar{\underline{z}}$ entstehen. Wenn die zulässige Lösung auch noch optimal sein soll, liegt - wie aus (1 -13) folgt - ein Teilproblem der Art (1) vor und demnach braucht man nur unter solchen $\bar{x}_{NQ}$ zu suchen, die mit Basislösungen von (1) korrespondieren. Maximal enthält $\bar{x}_{NQ}$ also n_{BZ} positive Komponenten; wenn $\bar{x}_{NQ}$ im weiteren betrachtet wird, gilt immer diese Einschränkung.

Hieraus läßt sich weiter schließen, daß die Maximalzahl positiver nichtganzzahliger Variabler unseres GGLP-Problems (1 -1) gleich der Gesamtzahl m aller Nebenbedingungen ist. Diese Aussage ist natürlich nur dann nicht trivial, wenn $m < n_Q$.

Im allgemeinen GGLP-Fall wird die LP-Basis, wie gezeigt wurde, zufällig in einen B_Z-und B_Q-Teil aufgespalten, damit die Zeilenzahl der Kongruenz (232-16) mit:

(2) $n_{BZ} = m - n_{BQ}$

festgelegt und nach (1) die Zahl positiver nichtganzzahliger Nebenbasisvariablen auf n_{BZ} eingeschränkt. Insgesamt können deshalb höchstens $m = n_{BZ} + n_{BQ}$ rationale Variable positiv werden. Wir haben also im GGLP-Fall für dieses Problem die gleiche Aussage wie für die LP-Aufgabe, bei der alle Variablen nichtganzzahlig sind:

(3) Satz: Maximalzahl positiver nichtganzzahliger Variabler

Wie für LP-Probleme gilt für GGLP-Aufgaben, daß bei Existenz optimaler Lösungen auch eine optimale Lösung vorhanden ist, bei der die Zahl positiver nichtganzzahliger Variabler höchstens gleich der Zahl m der Nebenbedingungsgleichungen ist.

(b) Festlegung von $\underset{\sim}{N}_{Q1}$

Die Lösung des Problems (241-1) können wir jetzt wie folgt angehen. Wir definieren zunächst $\underset{\sim}{N}_{Q1}$ als Teilmatrix aus $\underset{=}{N}_{Q1}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(4) Definition:

Eine $(n_{BZ} \cdot r)$-Teilmatrix aus $\underset{=}{N}_{Q1}$ mit $r \leq r_{Min} = \text{Min}\{n_{NQ}, n_{BZ}\}$ linear unabhängigen Spalten $\underset{=}{a}_{1j}$ aus $\underset{=}{N}_{Q1}$ sei mit $\underset{\sim}{N}_{Q1}$ bezeichnet. Ist eine bestimmte dieser Matrizen mit Index l gemeint, so werden wir zur genauen Festlegung dafür $\underset{\sim}{N}^{l}_{Q1}$ schreiben.

******

Die Obergrenze für r muß in der angegebenen Weise festgelegt werden, da für GGLP-Probleme für die Dimension von $\underset{=}{N}_{Q1}$ allgemein die Fälle zu unterscheiden sind, daß $n_{NQ} \leq n_{BZ}$ oder $n_{NQ} > n_{BZ}$.

Bei einem bestimmten $\underset{=}{N}_{Q1}$ können (zufällig) alle Teilmatrizen mit maximal r Spalten aus linear unabhängigen Vektoren bestehen. Im allgemeinen muß dies aber nicht so sein. Da mithin die Zahl k aller möglichen Teilmatrizen $\underset{\sim}{N}_{Q1}$ von der speziellen numerischen Struktur von $\underset{=}{N}_{Q1}$ abhängt, können wir für k keinen eindeutigen Wert, sondern nur eine Obergrenze vorgeben. Diese lautet:

$$(5)\quad k \leq \sum_{i=1,\ldots,r_{Min}} \binom{r_{Min}}{i}$$

Es gibt genau $\binom{r_{Min}}{i}$ Möglichkeiten aus r_{Min} Spalten i verschiedene auszuwählen. Da wir alle Fälle betrachten müssen, Teilmatrizen aus $\underset{=}{N}_{Q1}$ zu bilden, ist über i bis zur maximal zulässigen Zahl r_{Min} zu summieren.

Wir werden jetzt zunächst untersuchen, in welcher Weise man über diese Teilmatrizen $\underset{\sim}{N}_{Q1}$ durch Linearkombination ihrer Spalten mit rationalen Linearfaktoren ganzzahlige Vektoren erzeugen kann. Es wird sich zeigen, daß die Menge aller rationalen r-Vektoren $\underline{\bar{y}}$, wobei $\bar{0} \leq \underline{\bar{y}} < \bar{1}$, die über die l-te Teilmatrix $\underset{\sim}{N}^{l}_{Q1}$ (l = 1,...,k) nach:

$$(6)\quad \underset{\sim}{N}^{l}_{Q1} \quad \underline{\bar{y}} = \underline{\bar{z}}$$

ganzzahlige n_{BZ}-Vektoren $\underline{\bar{z}}$ bestimmen, eine endliche Abel'sche Gruppe G^{l}_{NQ} bilden [Abschnitt (c)]. Über die durch $\underset{\sim}{N}^{l}_{Q1}$ determinierte Gruppe G^{l}_{NQ} lassen sich alle rationalen r-Vektoren größer/gleich $\bar{0}$ identifizieren, die mit $\underset{\sim}{N}^{l}_{Q1}$ ganzzahliges $\underline{\bar{z}}$ produzieren: solche Vektoren sind mod E immer kongruent einem $\underline{\bar{y}} \in G^{l}_{NQ}$ [Abschnitt (d)].

Durch die Gesamtheit der Moduln G^{l}_{NQ} $(l = 1,\ldots,k)$ wird in eindeutiger Weise der Komplex K_{NQ} aller n_{NQ}-Vektoren $\bar{\underline{y}}$ $(\bar{0} \geq \bar{\underline{y}} < \bar{1})$ festgelegt, die über $\underline{N}_{Q1}\ \bar{\underline{y}} = \bar{\underline{z}}$ ganzzahliges $\bar{\underline{z}}$ erzeugen. K_{NQ} macht Aussagen über die Ganzzahligkeitsabweichungen der rationalen LP-Nebenbasisvariablen $\bar{x}_{NQ}$: wenn ein GGLP-Problem überhaupt eine optimale Lösung besitzt, läßt sich immer eine solche Optimallösung finden, bei der

(7) $\bar{x}_{NQ} \equiv \bar{\underline{y}} \pmod{E}$ $\qquad (\bar{\underline{y}} \in K_{NQ})$

Dies wird im einzelnen in Abschnitt (e) betrachtet.

(c) Erzeugung ganzzahliger Vektoren über $\underline{N}_{Q1}$ durch rationale Linearfaktoren kleiner 1

Wir werden jetzt untersuchen, welche Eigenschaften rationale r-Vektoren $\bar{\underline{y}}$ mit Komponenten $0 \leq \underline{y}_j < 1$ haben, die für eine gegebene $(n_{BZ} \cdot r)$-Matrix $\underline{N}_{Q1}$ ganzzahlige n_{BZ}-Vektoren $\bar{\underline{z}}$ erzeugen:

(8) $\underline{N}_{Q1}\ \bar{\underline{y}} = \bar{\underline{z}} \in Z^{n_{BZ}}$

$\bar{\underline{y}} \in Q^{r},\ \bar{0} \leq \bar{\underline{y}} < \bar{1}.$

Wie schon erwähnt wurde, wird sich zeigen, daß die Vektoren $\bar{\underline{y}}$ eine endliche Abel'sche Gruppe G^{l}_{NQ} bilden. Die gestellte Aufgabe läßt sich unter Verwendung des bisher erarbeiteten Instrumentariums lösen.

$G(\underset{\sim}{N}_{Q1})$ stellt ein r-dimensionales Untergitter von G(E) dar, wobei E hier n_{BZ}-reihige Einheitsmatrix ist. Durch Ableitung der Elementarteiler aus $\underset{\sim}{N}_{Q1}$ mit Algorithmus (1) erhalten wir unimodulare Matrizen P und Q, die Basiswechsel in G(E) bzw. $G(\underset{\sim}{N}_{Q1})$ beschreiben. Diese Transformationen haben die Eigenschaft, neue Basen [siehe (222-9,10)]:

(10) $E^* = E \quad P^{-1} = P^{-1}$ und

$$\underset{\sim}{N}^*_{Q1} = N_{Q1} \quad Q$$

in den beiden Gittern einzuführen, die nach Satz (222-4) durch eine Elementarteilermatrix S verbunden sind:

(11) $\underset{\sim}{N}^*_{Q1} = P^{-1} \quad S.$

S ist dabei die zu $\underset{\sim}{N}_{Q1}$ unimodular äquivalente Elementarteilerform (222-12):

(12) $S = P \quad \underset{\sim}{N}_{Q1} \quad Q.$

Wie schon an mehreren Stellen dieser Arbeit, so lassen sich auch hier wieder aus der Elementarteilerableitung explizit Informationen gewinnen, die direkt für die Lösung unseres Problems verwendbar sind.

Die zu $\underset{\sim}{N}_{Q1}$ unimodular äquivalente Matrix $\underset{\sim}{N}^*_{Q1}$ kann nach (11) in ein Produkt aus der unimodularen $(n_{BZ} \cdot n_{BZ})$-Matrix P^{-1} und der Elementarteilerform S zerlegt werden. Bevor wir diese Zerlegung ausnutzen, benötigen wir noch die folgende Aussage:

(13) Satz: Erzeugung ganzzahliger Vektoren über unimodulare Matrizen

P* sei eine (n·r)-Matrix, die aus der unimodularen (n·n)-Matrix P dadurch entsteht, daß eine beliebige Teilmenge der Spalten aus P herausgegriffen wird. Dann können Kongruenzen:

(14) $P^* \bar{x} = \bar{z} \equiv \bar{0} \pmod{E}$

nur für ganzzahliges $\bar{x}$ erfüllt sein.

Beweis:

Sowohl P als auch P^{-1} können als Gitterbasen für G(E) dienen. Deshalb kann man durch:

- $P \bar{x} = \bar{z}$ bei geeigneter Wahl ganzzahliger $\bar{z}$ beliebige $\bar{x} \in Z^n$ und durch
- $P^{-1} \bar{z} = \bar{x}$ bei geeigneter Wahl ganzzahliger $\bar{x}$ beliebige $\bar{z} \in Z^n$ festlegen.

Daraus folgt, daß in Systemen $P \bar{x} = \bar{z}$ bei unimodularem P die Wahl rationaler und nichtganzzahliger $\bar{x}$ notwendige und hinreichende Bedingung für die Erzeugung rationaler und nichtganzzahliger $\bar{z}$ ist.

Wenn dies für die gesamte Matrix P gilt, muß die Aussage auf jeden Fall auch für beliebige Teilmatrizen P* von P erfüllt sein. Damit ist immer dann, wenn Kongruenz (14) gegeben ist, ganzzahliges $\bar{x}$ festgelegt.

*****

Nach (11) ist $\underset{\sim}{N}^*_{Q1}$ in eine unimodulare Komponente mit ganzzahligen Faktoren s_i zerlegt: $\underset{\sim}{N}^*_{Q1}$ besteht aus den jeweils mit s_i gewichteten ersten r Spalten von P^{-1}. Aus Satz (13) folgt dann, daß Kongruenzen:

$$(15)\quad \underset{\sim}{N}^*_{Q1}\ \bar{x} = \bar{z} \equiv \bar{0} \pmod{E} \qquad [\bar{0} \le \bar{x} < \bar{1}]$$

nur für rationales $\bar{x}$ erfüllt sein können, dessen Komponenten x_i jeweils folgende Werte annehmen dürfen:

$$(16)\quad 0/s_i,\ 1/s_i,\ \ldots,s_i-1/s_i \quad (i = 1,2,\ldots,r)$$

Die Gesamtheit aller Vektoren $\bar{x}$, die Bedingung (15) erfüllen, bilden dabei die Gruppe $\{\bar{x}\}$ mit der Ordnung $\prod s_i$, die sich als direktes Produkt ihrer r Untergruppen darstellen läßt:

$$(17)\quad \{\bar{x}\} = \left\{ \begin{matrix} k_1/s_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\} \oplus \ldots \oplus \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k_i/s_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\} \oplus \ldots \oplus \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k_r/s_r \end{matrix} \right\}$$

$$(0 \le k_i < s_i)$$

Die Vektoren $[0,\ldots,0,1/s_i,0,\ldots,0]'$ sind jeweils erzeugende Elemente der Ordnung s_i für die in (17) angesprochenen zyklischen Untergruppen. In $\{\bar{x}\}$ ist Addition mod E definiert. Da

wir jedoch nicht rationale Linearfaktoren x_i für das mit der Basis $\underset{\sim}{N}^*_{Q1}$ in das Gitter $G(\underset{\sim}{N}_{Q1})$ eingeführte Koordinatensystem suchen, sondern nach (8) Linearfaktoren $\bar{\underset{\sim}{y}}$ für die Ausgangsbasis $\underset{\sim}{N}_{Q1}$, ist unser Problem noch nicht vollständig gelöst. Wir haben noch nach der Darstellung der $\bar{x}$ im Hinblick auf die Basis $\underset{\sim}{N}_{Q1}$ zu fragen.

Aus (10) ergibt sich:

$$(18)\quad \underset{\sim}{N}^*_{Q1} \quad \bar{x} = \underset{\sim}{N}_{Q1} \quad Q \quad \bar{x},$$

Daraus kann man die gesuchte Gruppe G^1_{NQ} ableiten. Das i-te Gruppenelement $\bar{\underset{\sim}{y}}_i \in G^1_{NQ}$ läßt sich dabei durch:

$$(19)\quad \bar{\underset{\sim}{y}}_i = \nu_E\,(Q \quad \bar{x}_i)$$

aus dem Element $\bar{x}_i \in \{\bar{x}\}$ ableiten. Wegen der Unimodularität von Q, insbesondere der Tatsache, daß der GGT der Elemente in den Spalten unimodularer Matrizen jeweils 1 ist (231-30), wird über $\nu_E Q$ jedem $\bar{x}_i$ eineindeutig ein $\bar{\underset{\sim}{y}}_i \in G^1_{NQ}$ zugeordnet. Die inverse Abbildung von G^1_{NQ} in $\{\bar{x}\}$ lautet $\nu_E Q^{-1}$. G^1_{NQ} und $\{x\}$ sind isomorph:

$$(20)\quad \{\bar{x}\} \xrightarrow{\ \nu_E Q\ } G^1_{NQ}, \qquad G^1_{NQ} \xrightarrow{\ \nu_E Q^{-1}\ } \{\bar{x}\}$$

Erzeugende Elemente der r Untergruppen von G^1_{NQ} erhalten wir dadurch, daß wir $\nu_E Q$ auf die in (17) wiedergegebenen erzeugenden Elemente von $\{\bar{x}\}$ anwenden. Die dabei auftretenden Produkte:

$$(21)\quad Q \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/s_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (i = 1,2,\ldots,r)$$

bedeuten jeweils die Division der i-ten Spalte $\bar{q}_i$ von Q durch s_i. Entsprechend (17) können wir G^1_{NQ} also durch das direkte Produkt:

$$(22)\quad \begin{aligned} G^1_{NQ} = {} & \{\nu_E\ (k_1/s_1\ \ \bar{q}_1)\} \oplus \ldots. \\ & \oplus \{\nu_E\ (k_i/s_i\ \ \bar{q}_i)\} \oplus \ldots. \\ & \oplus \{\nu_E\ (k_r/s_r\ \ \bar{q}_r) \qquad (0 \le k_i < s_i) \end{aligned}$$

darstellen. Als Gruppenoperation in G^1_{NQ} ist Addition mod E erklärt. Die Ergebnisse dieses Abschnitts lassen sich in folgendem Satz zusammenfassen:

(23) Satz: Erzeugung ganzzahliger Vektoren über N_{Q1} durch echte Dezimalbrüche als Linearfaktoren

r-Vektoren $\bar{y}$ mit rationalen Komponenten $0 \le y_j < 1$, welche die Kongruenz:

$$\underset{\sim}{N}_{Q1}\ \bar{\underline{y}} = \bar{\underline{z}} \equiv \bar{0} \pmod{E}$$

erfüllen, bilden eine endliche Abel'sche Gruppe G^1_{NQ} der Ordnung:

$$|\ G^1_{NQ}\ | = \prod_{k=1,\ldots,r} s_k .$$

Dabei sind die s_k die Elementarteiler von $\underset{\sim}{N}_{Q1}$. G^1_{NQ} läßt sich gemäß (22) als direktes Produkt von r zyklischen Untergruppen, jeweils der Ordnung s_k, darstellen.

*****

Wir haben jetzt die Möglichkeit, alle rationalen $\bar{0} \le \bar{\underline{y}} < \bar{1}$ zu finden, die über $\underset{\sim}{N}_{Q1}$ ganzzahlige Vektoren $\bar{\underline{z}}$ erzeugen. Dazu sind die Elementarteiler aus $\underset{\sim}{N}_{Q1}$ abzuleiten und die zugehörige Transformationsmatrix Q zu bestimmen. Nach (22) lassen sich r erzeugende Elemente von G^1_{NQ} identifizieren und durch laufende Anwendung der Gruppenoperation auf diese Elemente schließlich alle $\bar{\underline{y}} \in G^1_{NQ}$ ermitteln.

(d) Erzeugung ganzzahliger Vektoren über $\underset{\sim}{N}_{Q1}$ durch allgemeine rationale Linearfaktoren

Es wurde gezeigt, daß es nur eine endliche Zahl rationaler $\bar{\underline{y}}$ ($\bar{0} \le \bar{\underline{y}} < \bar{1}$) gibt, die über $\underset{\sim}{N}_{Q1}$ ganzzahliges $\bar{\underline{z}}$ festlegen. Die unendliche Zahl rationaler r-Vektoren $\bar{w}$ ($\bar{w} \ge \bar{0}$), welche die r-Spalten von $\underset{\sim}{N}_{Q1}$ zu ganzzahligen Vektoren $\bar{z}$ linear kombinieren können, läßt sich jetzt direkt aus den $\bar{\underline{y}} \in G^1_{NQ}$ herleiten.

(24) Satz: Erzeugung ganzzahliger Vektoren über $\underset{\sim}{N}_{Q1}$ durch rationale Linearfaktoren

Vektoren $\bar{w}(\bar{w} \geq \bar{0}, \bar{w} \in Q^r)$, welche die Kongruenz:

$$N_{Q1}\ \bar{w} = \bar{z} \equiv \bar{0} \pmod{E}$$

erfüllen, lassen sich immer als Summe:

$$\bar{w} = \underline{\bar{w}} + \underline{\bar{y}}$$

darstellen. Dabei gilt $\underline{\bar{y}} \in G^1_{NQ}$ und $\underline{\bar{w}} \in Z^r$ nach:

$$\underline{\bar{w}} := \bar{w} - \bar{w} \bmod E.$$

Beweis:

Die Kongruenz können wir für jedes $\bar{w} \geq 0$ in einen ganzzahligen und rationalen Teil zerlegen und den ganzzahligen Teil vernachlässigen:

$$\underset{\sim}{N}_{Q1} \cdot \underline{\bar{w}} + \underset{\sim}{N}_{Q1} \cdot \bar{w} \bmod E \equiv \underset{\sim}{N}_{Q1} \cdot \bar{w} \bmod E \equiv \bar{0} \pmod{E}.$$

Wir haben das Problem damit auf die in Satz (23) angesprochene Kongruenz reduziert und es folgt, daß der Rest $\bar{w}$ mod E mit einem der Reste aus G^1_{NQ} übereinstimmen muß: $\bar{w} \bmod E = \underline{\bar{y}} \in G^1_{NQ}$.

*****

Mit der Bestimmung der N_{Q1} zugeordneten Gruppe G^1_{NQ} sind wir also in der Lage, alle Vektoren $\bar{w} \geq 0$ zu identifizieren, die über N_{Q1} ganzzahliges $\bar{z}$ erzeugen können.

(e) Erzeugung ganzzahliger Vektoren über N_{Q1} durch rationale Linearfaktoren

Es wird jetzt gezeigt, in welcher Weise sich die endliche Zahl aller n_{NQ}-Vektoren $\bar{y} \in K_{NQ}$ $(\bar{0} \leq \bar{y} < \bar{1},\ \bar{y} \in Q^{n_{NQ}})$ ergibt, die über N_{Q1} $\bar{y} = \bar{z}$ ganzzahliges $\bar{z}$ festlegen. N^1_{Q1} ist eine bestimmte Teilmatrix aus N_{Q1}. Es besteht eine einfache Korrespondenz zwischen den durch N^1_{Q1} über G^1_{NQ} determinierten rationalen r-Vektoren $\bar{y}$ und den rationalen n_{NQ}-Vektoren $\bar{y}$. Die Zuordnung läßt sich am besten an einem einfachen Beispiel veranschaulichen:

(25)

$$
\begin{aligned}
N_{Q1} &= \left[\bar{a}_{11},\ \bar{a}_{12},\ \bar{a}_{13},\ \bar{a}_{14},\ \bar{a}_{15},\ \bar{a}_{16}\right] \\
N^1_{Q1} &= \left[\bar{a}_{12},\ \bar{a}_{13},\ \bar{a}_{15}\right] \\
\bar{y}^* &= \left[y^*_2,\ y^*_3,\ y^*_5\right]' \\
\bar{y}^* &= \left[0,\ y^*_2,\ y^*_3,\ 0,\ y^*_5,\ 0\right]'
\end{aligned}
$$

$\underline{\underline{N}}_{Q1}$ enthält 6 Spalten $\underline{\bar{a}}_{1j}$, $\underset{\sim}{N}^{1}_{Q1}$ davon die 2., 3. und 5. Spalte. G^{1}_{NQ} besteht also aus Vektoren $\underline{\bar{y}}$ mit der Länge 3. Die Vektoren $\underline{\bar{y}} \in K_{NQ}$ besitzen entsprechend 6 Komponenten.

Ein bestimmter Vektor aus G^{1}_{NQ} sei $\underline{\bar{y}}^*$. Das korrespondierende $\underline{\bar{y}}^*$ erhält man dadurch, daß man die der j-ten Spalte aus $\underline{\underline{N}}_{Q1}$ zuordnenbare Komponente $\underline{y}^*_j$ aus $\underline{\bar{y}}^*$ als entsprechende Komponente $\underline{y}^*_j$ von $\underline{\bar{y}}^*$ wählt und die verbleibenden Positionen von $\underline{\bar{y}}^*$ Null setzt. So ergibt sich hier etwa die 2. Komponente von $\underline{\bar{y}}^*$ aus der 1. Komponente von $\underline{\bar{y}}^*$, die der 2. Spalte von $\underline{\underline{N}}_{Q1}$ zugeordnet ist. Da $\underset{\sim}{N}^{1}_{Q1}$ nicht die 4. Spalte von $\underline{\underline{N}}_{Q1}$ enthält, wird $\underline{y}^*_4 = 0$.

Diese Abbildung von Elementen $\underline{\bar{y}}$ auf Elemente $\underline{\bar{y}}$ sei ν_y genannt:

$$(26)\quad \nu_y : \underline{\bar{y}} \rightarrow \underline{\bar{y}} \qquad \underline{\bar{y}} \in G^{1}_{NQ},\ \underline{\bar{y}} \in \nu_y G^{1}_{NQ}$$

Natürlich ist auch $\nu_y G^{1}_{NQ}$ eine Gruppe bei Addition mod E, da sich die Elemente von $\underline{\bar{y}}^* \in G^{1}_{NQ}$ nur durch Nullkomponenten unterscheiden. K_{NQ} wird jetzt definiert als Vereinigungsmenge der Elemente aller Gruppen $\nu_y G^{1}_{NQ}$:

$$(27)\quad K_{NQ} := \left\{ \underline{\bar{y}} \mid \underline{\bar{y}} \in \bigcup_{1} \nu_y G^{1}_{NQ}\ , \forall 1 \in \{1,\ldots k\} \right\}.$$

K_{NQ} ist keine Gruppe, sondern ein spezieller Komplex einer Gruppe G^{OB}_{NQ}. G^{OB}_{NQ} sei definiert als das direkte Produkt aller Gruppen $\nu_y G^{1}_{NQ}$:

$$(28)\quad G_{NQ}^{OB} := \{\bar{\underline{y}} \mid \bar{\underline{y}} \in \{\nu_y G_{NQ}^1\} \oplus \ldots \oplus \{\nu_y G_{NQ}^1\} \oplus \ldots \oplus \{\nu_y G_{NQ}^k\}\}.$$

K_{NQ} ist insofern spezieller Komplex aus G_{NQ}^{OB}, als er nur aus Untergruppen von G_{NQ}^{OB} besteht. Über K_{NQ} läßt sich in bestimmter Weise ein Ausschnitt aus der konvexen Hülle aller zulässigen gemischt-ganzzahligen Punkte eines GGLP-Problems finden. Mit anderen Worten kann man über K_{NQ} einige der Außenflächen des Polyeders bestimmen, der den Zulässigkeitsbereich eines GGLP-Problems für den nichtganzzahligen Nebenbasisteil in $Q^n NQ$ darstellt. Aus der Herleitung folgt, daß alle Elemente $\bar{\underline{y}} \in K_{NQ}$ maximal n_{BZ} positive Komponenten besitzen. Korrespondierend befinden sich alle Eckpunkte des Polyeders, die in $Q^n NQ$ liegen, maximal in n_{BZ}-dimensionalen Unterräumen von Q_{NQ}^n. Die Eckpunkte sind dabei mod E kongruent einem $\bar{\underline{y}} \in K_{NQ}$.

(f) Struktur der nichtganzzahligen Nebenbasisvariablen

Mit der Bestimmung von K_{NQ} haben wir jetzt alle rationalen Vektoren $\bar{\underline{y}}$ $(\bar{0} \leq \bar{\underline{y}} < \bar{1})$ gefunden, die maximal n_{BZ} positive Komponenten besitzen und die Spalten von $N_{=Q1}$ zu ganzzahligen Vektoren $\bar{\underline{z}}$ linear kombinieren können.

Analog zu den Ausführungen unter Abschnitt (d) können wir aus den Elementen $\bar{\underline{y}} \in K_{NQ}$ direkt alle möglichen Werte für $\bar{\underline{x}}_{NQ}$ mit maximal n_{BZ} positiven Komponenten herleiten; $\bar{\underline{x}}_{NQ}$ kann sich nur um eine ganzzahlige Differenz von einem der Elemente aus K_{NQ} unterscheiden. Dieses Ergebnis ist im fol-

genden Satz zusammengefaßt, der gleichzeitig den Ausgangspunkt der Betrachtungen in diesem Kapitel noch einmal explizit berücksichtigt:

(29) Satz: Struktur der nichtganzzahligen LP-Nebenbasisvariablen in der Optimallösung des GGLP-Problems

Wenn ein GGLP-Problem überhaupt eine Optimallösung besitzt, existiert immer auch eine optimale Lösung, bei der für die nichtganzzahlige LP-Nebenbasisvariable $\bar{x}_{NQ} \geq \bar{0}$ gilt:

(29) $\bar{x}_{NQ} \equiv \bar{y} \pmod{E}$.

Hierbei ist $\bar{y} \in K_{NQ}$.

*****

Bei der Suche nach einer Optimallösung unseres GGLP-Problems können wir uns also bei der Wahl möglicher Werte für den oben (siehe Tab. 2) mit $\bar{x}_{NQ}$ definierten Teil der gesamten n_{NQ} Variablen $\bar{x}$ auf die durch (29) festgelegte Teilmenge von $Q^{n_{NQ}}$ beschränken. Einige Hinweise für eine Ausnutzung dieser Informationen finden sich im weiteren.

(g) Struktur der durch $\underline{\underline{N}}_{Q1}$ erzeugten ganzzahligen Vektoren

Die durch $\underline{\underline{N}}_{Q1}$ $\bar{y} = \bar{z}$ festgelegten Vektoren $\bar{z}$ sind Elemente der unter (232-c) definierten Gruppe $\mathcal{G}(E)$. Da wir später einen Optimierungsalgorithmus aufzeigen wollen, der innerhalb der Gruppe $\mathcal{G}_{BZ}$ (232-7) arbeitet, benötigen wir die Bilder der durch $\bar{y} \in K_{NQ}$ bestimmten Vektoren $\bar{z}$ in $\mathcal{G}_{BZ}$. Diese erhält man durch Anwendung des Homomorphismus ν_S auf $\bar{z}$.

Damit können wir über:

$$(30)\quad \bar{y} \xrightarrow{\underline{\underline{N}}_{Q1}} \bar{z} \xrightarrow{\nu_S} \underset{\sim}{\bar{a}}_1$$

Elemente $\bar{y} \in K_{NQ}$ in die Elemente $\underset{\sim}{\bar{a}}_1 = \nu_S \underline{\underline{N}}_{Q1} \bar{y}$ eines Komplexes $K_{BZ}^{NQ} \subset \mathcal{G}_{BZ}$ übertragen. Die $\underset{\sim}{\bar{a}}_1$ stellen also mod $\underline{\underline{S}}_{Z1}$ reduzierte rationale Linearkombinationen der Spalten $\underline{\bar{a}}_{1j}$ aus $\underline{\underline{N}}_{Q1}$ dar. Ihre Gesamtheit unter Hinzunahme der mit 1 gewichteten Spalten $\underline{\bar{a}}_{1j}$ aus $\underline{\underline{N}}_{Q1}$ sei definiert als der Komplex K_{BZ}^{NQ}. Unter Verwendung der Bezeichnung $\bar{e}_i$ für den i-ten Einheitsvektor der Länge n_{NQ} heißt es genau:

$$(31)\quad K_{BZ}^{NQ} := \left\{ \underset{\sim}{\bar{a}}_1 \mid \underset{\sim}{\bar{a}}_1 = \nu_S \underline{\underline{N}}_{Q1} \bar{y},\ \bar{y} \in K_{NQ} \quad \underline{\text{oder}} \right.$$

$$\left. \underset{\sim}{\bar{a}}_1 = \nu_S \underline{\underline{N}}_{Q1} \bar{e}_i,\ i \in \{1;2;\ldots;n_{NQ}\} \right\}.$$

Die Zahl der Elemente von K_{BZ}^{NQ} sei p. Durch laufende Anwendung der Gruppenoperation Addition mod $\bar{S}_{Z1}$ auf ein bestimmtes Element $\bar{\underset{\sim}{a}}_{1h} \in K_{BZ}^{NQ}$ erhalten wir die zyklische Untergruppe $\{\bar{\underset{\sim}{a}}_{1h}\} \subset G_{BZ}$.

Damit können wir über K_{BZ}^{NQ} die Untergruppe $G_{BZ}^{NQ} \subset G_{BZ}$ erzeugen, die definiert ist als das direkte Produkt:

$$(32)\quad G_{BZ}^{NQ} := \{\bar{\underset{\sim}{a}}_{11}\} \oplus \cdots \oplus \{\bar{\underset{\sim}{a}}_{1h}\} \oplus \cdots \oplus \{\bar{\underset{\sim}{a}}_{1p}\}.$$

Aus G_{BZ}^{NQ} kann man u.a. die folgenden Informationen für ein GGLP-Problem ableiten.

Wenn z.B. J_{NZ} leer ist, im LP-Optimum des GGLP-Problems also nur nichtganzzahlige Variable Nebenbasisvariable sind, und G_{BZ}^{NQ} echte Teilmenge von G_{BZ} ist, kann Kongruenz (232-16) nicht für alle rechten Seiten $\bar{\underset{\sim}{b}}_1 \in Z^{n_{BZ}}$ erfüllt werden und das GGLP-Problem hat entsprechend nicht für beliebige $\bar{b} \in Z^m$ zulässige Lösungen [siehe Beispiel (33-i-I)]. Analoge Aussagen lassen sich für das rein-ganzzahlige Problem finden (GOMORY [1969, S. 468]).

Dieser Fall kann nur eintreten, wenn sich aus $\bar{\underset{=}{N}}_{Q1}$ kein $\bar{\underset{\sim}{N}}_{Q1}$ mit mehr als n_{BZ}-1 linear unabhängigen Spalten bilden läßt. Sofern sich nur ein N_{Q1} mit n_{BZ} linear unabhängigen Spalten finden läßt, kann nach dem Gesagten N_{Q1} bei Verwendung rationaler Linearfaktoren Basis von G(E) sein und mithin alle Reste aus G_{BZ} erzeugen. Durch die nichtganzzahligen Nebenbasisvariablen allein kann also dann schon Kongruenz (232-16) für beliebige $\bar{\underset{=}{b}}_1$ erfüllt werden.

Daraus folgt nicht, daß das zugehörige GGLP-Problem immer eine zulässige Lösung besitzt. Zusätzlich sind noch die Nichtnegativitätsbedingungen zu beachten.

(h) Zur algorithmischen Bestimmung von K_{NQ} und $\mathcal{G}_{NQ}^{OB}$

Die algorithmisch zweckmäßigste Bestimmung von K_{NQ} und/oder $\mathcal{G}_{NQ}^{OB}$ ist insofern ein nicht eindeutig lösbares Problem, als vielfältige Möglichkeiten der Gesamtkonzeption von GGLP-Optimierungsverfahren auf gruppentheoretischer Grundlage bestehen und die Teilaufgabe der Festlegung von K_{NQ} oder $\mathcal{G}_{NQ}^{OB}$ günstig in den jeweiligen Gesamtrahmen eingebettet sein muß, wenn man leistungsfähige Algorithmen aufbauen will. An dieser Stelle sollen zu diesem Problemkreis deshalb nur einige Hinweise gegeben werden.

In diesen Algorithmen kann man dabei die engen Beziehungen zwischen K_{NQ} und $\mathcal{G}_{NQ}^{OB}$ ausnutzen. Wie sich über die Bestimmung von K_{NQ} $\mathcal{G}_{NQ}^{OB}$ gewinnen läßt, indem man durch eine systematische Bildung der direkten Produkte gemäß (28) alle Elemente von $\mathcal{G}_{NQ}^{OB}$ enumeriert, kann man umgekehrt durch eine Identifizierung aller Untergruppen aus $\mathcal{G}_{NQ}^{OB}$ mit Vektoren als Gruppenelementen, die höchstens n_{BZ} positive Komponenten besitzen, den Komplex $K_{NQ} \subset \mathcal{G}_{NQ}^{OB}$ ableiten.

(α) Die Herleitung von K_{NQ} und G_{NQ}^{OB} über die verschiedenen Gruppen G_{NQ}^{1} hatte in diesem Kapitel den Sinn, genaue Definitionen zu ermöglichen. Damit ist nicht gesagt, daß die algorithmische Bestimmung in gleicher Weise vonstatten geht. Dies wird besonders für den Fall deutlich, daß $\underline{\underline{N}}_{Q1}$ spaltenregulär ist und $n_{NQ} \leq n_{BZ}$, und sei deshalb an diesem Beispielsfall näher erläutert.

Hier erhält man nämlich durch Anwendung von Algorithmus (2) auf $\underline{\underline{N}}_{Q1}$ direkt die n_{NQ} erzeugenden Elemente, aus denen sich die gleiche Zahl zyklischer Untergruppen aufbauen, deren direktes Produkt G_{NQ}^{OB} ergibt [siehe (22)]. Durch eine systematische Anwendung der Gruppenaddition mod E kann man aus den erzeugenden Elementen alle $\underline{\bar{y}}$ enumerieren. Wegen der Dimensionen von $\underline{\underline{N}}_{Q1}$ ist hier $K_{NQ} = G_{NQ}^{OB}$ und es gilt $\underline{\bar{y}} = \nu_y \underline{\bar{y}} = \underline{\bar{y}}$.

Für die Struktur der G_{NQ}^{1} läßt sich dabei folgendes festhalten. Es sei $\underset{\sim}{N}_{Q1}^{\bar{I}} = \underline{\underline{N}}_{Q1}$ und die aus $\underset{\sim}{N}_{Q1}^{\bar{I}}$ ableitbare Gruppe [siehe (23)] $G_{NQ}^{\bar{I}}$. Nach dem eben gesagten gilt nun $G_{NQ}^{\bar{I}} = G_{NQ}^{OB} = K_{NQ}$. Alle anderen Gruppen G_{NQ}^{1}, die sich aus echten Teilmatrizen von $\underset{\sim}{N}_{Q1}^{\bar{I}}$ ableiten lassen, bilden nämlich Untergruppen von $G_{NQ}^{\bar{I}}$.

Mit anderen Worten impliziert die Beantwortung der Frage, welche ganzzahligen Vektoren sich aus einer spaltenregulären Matrix $\underset{\sim}{N}_{Q1}^{\bar{I}}$ durch Linearkombination aller ihrer Spalten mit rationalen Linearfaktoren erzeugen lassen, die Antwort auf die Frage, wie man durch eine rationale Linearkombination einer Teilmenge der Spalten von $\underset{\sim}{N}_{Q1}^{\bar{I}}$ ganzzahlige Vektoren produzieren kann.

Unser Zahlenbeispiel hat die hier zugrundegelegte Struktur. Es wird deshalb im nächsten Abschnitt (i) das beschriebene Vorgehen veranschaulichen.

(ß) Für den Fall, daß für die Dimensionen von $\underset{=}{N}_{Q1}$ $n_{NQ} > n_{BZ}$ gilt, läßt sich G_{NQ}^{OB} aus $\underset{=}{N}_{Q1}$ in der gleichen Weise wie unter (α) gewinnen, wenn man $\underset{=}{N}_{Q1}$ zu einer quadratischen und nichtsingulären Matrix durch Hinzufügen $n_{NQ}-n_{BZ}$ neuer Zeilen ergänzt. Es muß dabei garantiert werden, daß die Gruppen G_{NQ}^{OB} für die erweiterte Matrix und $\underset{=}{N}_{Q1}$ gleich sind.

Vorstellbar ist, daß eine derartige Erweiterung explizit geschieht und dann Algorithmus (2) auf die entstandene quadratische Matrix angewandt wird, oder daß im Rahmen eines modifizierten Algorithmus (2) zwar implizit eine erweiterte Matrix unterstellt, diese aber nicht explizit wiedergegeben wird.

(γ) Der GGT aller Elemente $\underset{=}{a}_{ij}$ einer Spalte $\underset{=}{\bar{a}}_{1j}$ von $\underset{\sim}{N}_{Q1}^{1}$ sei k.

Die Ordnung von G_{NQ}^{1} reduziert sich dann auf $|G_{NQ}^{1}|/k$, wenn man die zugeordnete nichtganzzahlige Variable x_j substituiert durch $x_j^k := x_j/k$ und die Spalte $\underset{=}{\bar{a}}_{1j}$ ersetzt durch $\underset{=}{\bar{a}}_{1j}^{k} := \underset{=}{\bar{a}}_{1j}/k$.

Ein Beispiel soll dies veranschaulichen (siehe Spalte 14 aus Tab. 6):

$$\underline{\underline{a}}_{1j} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \\ 16 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\underline{a}}^{k}_{1j} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

(33)

$$x_j \rightarrow x^k_j = x_j/2$$

Durch derartige Ersetzungen läßt sich die notwendige Rechenarbeit beträchtlich reduzieren. Praktisch läuft es darauf hinaus, daß man die nichtganzzahligen Variablen in neuen, verkleinerten Einheiten mißt. Statt G^1_{NQ} werden aus Matrizen $\underline{\underline{N}}^{1'}_{NQ}$, in denen die neue Spalte enthalten ist, Untergruppen $G^{1'}_{NQ} \subset G^1_{NQ}$ ermittelt, die insofern die vollen Informationen über die Teilbarkeitsstrukturen der N^1_{Q1} wiedergeben, als aus ihnen direkt die G^1_{NQ} ableitbar sind [siehe auch (i-37)].

(δ) Wenn K_{NQ} entsprechend dem in diesem Kapitel verwandten Aufbau durch eine sukzessive Bildung aller $\underline{N}_{Q1}$ aus $\underline{\underline{N}}_{Q1}$ bestimmt werden soll, kann man hinsichtlich der Enumerationssystematik auf Ideen zurückgreifen, die in den verschiedenen impliziten Enumerationsalgorithmen verwirklicht werden (BRAUER [1968, S. 91 ff.]). Durch eine solche Enumerationssystematik müßte insbesondere verhindert werden, daß sich als nicht-spaltenregulär erkannte Teilmatrizen aus $\underline{N}_{Q1}$ wiederholen.

(i) Zahlenbeispiel

In unserem Zahlenbeispiel besteht der nichtganzzahlige Nebenbasisteil des LP -Optimums zum untersuchten GGLP-Problem aus den Variablen x_{13} und x_{14} (Tab. 2 und Tab. 3). $\underline{N}_{Q1}$ geht aus Tab. 6 hervor.

Zur Ermittlung $G^{1}_{NQ} = K_{NQ} = G^{OB}_{NQ}$ können wir nach den Bemerkungen unter (h-α) direkt Algorithmus (2) verwenden, da hier $n_{NQ} = 2 < n_{BZ} = 3$ und die beiden Vektoren $\bar{\underline{a}}_{1,13}$ und $\bar{\underline{a}}_{1,14}$ linear unabhängig sind.

Die Ableitung der Elementarteiler aus $[\bar{\underline{a}}_{1,13}, \bar{\underline{a}}_{1,14}]$ wurde schon oben in Kap. 222 zur Veranschaulichung der Arbeitsweise von Algorithmus (2) durchgeführt. Die Matrizen P, Q und S sind aus Tab. 4 ersichtlich.

Da $s_1 = 1$ und $s_2 = 14$, sind die beiden erzeugenden Elemente von G^{OB}_{NQ} entsprechend (22) bei Addition mod $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$:

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 6/14 \\ 1/14 \end{bmatrix}$;

mithin ist die gesamte Gruppe zyklisch der Ordnung 14 mit dem erzeugenden Element $\begin{bmatrix} 6/14 \\ 1/14 \end{bmatrix}$. G^{OB}_{NQ} ist in Tab. 8 im ersten Teil (Spalten 1 bis 14) wiedergegeben.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
$G^{1}_{NQ} = K_{NQ}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{12}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{10}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{8}{14}$	$\frac{0}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{12}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{10}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{8}{14}$	$\frac{0}{14}$	1	0	$\bar{e}_1, \bar{e}_2$
$= G^{0B}_{NQ}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{6}{14}$	$\frac{7}{14}$	$\frac{8}{14}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{10}{14}$	$\frac{11}{14}$	$\frac{12}{14}$	$\frac{13}{14}$	$\frac{0}{14}$	0	1.	
$\underset{\sim}{N}_{Q1}\bar{y} = \bar{z}$	0	0	-1	-1	-2	-2	-3	-3	-3	-4	-4	-5	-5	0	1	-6	$\underset{=}{N}_{Q1}\bar{e}_i$
	1	2	0	1	-1	0	-2	-1	0	-2	-1	-3	-2	0	3	-4	
	2	4	4	6	6	8	8	10	12	12	14	14	16	0	2	16	
$\nu_S\bar{z} = \bar{a}_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\nu_S\underset{=}{N}_{Q1}\bar{e}_i$
	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	0	0	2	
	2	4	4	0	0	2	2	4	0	0	2	2	4	0	2	4	
$\bar{c}'^{*}_{NQ}\bar{y}$	29	58	31	60	33	62	35	64	93	66	95	68	97	0	56	70	$\bar{c}'^{*}_{NQ}\bar{e}_i$

Tab. 8: Ermittlung von K^{NQ}_{BZ} aus dem nichtganzzahligen Nebenbasisteil

Die nach $\underset{\sim}{N}_{Q1}\bar{y} = \bar{z}$ mit $\bar{y}$ über $\underset{\sim}{N}_{Q1}$ erzeugbaren 14 unterschiedlichen ganzzahligen Vektoren $\bar{z}$ gehen entsprechend aus dem zweiten Teil hervor. Die Bilder dieser Vektoren $\bar{z}$ und der beiden Spalten aus $\underset{=}{N}_{Q1}$ sind im Teil 3 von Tab. 8 angeführt. Der dabei angewandte Homomorphismus ν_S wurde allgemein unter (232-9) definiert, die Zahlen s_i sind aus Tab. 5 und (231-33) ersichtlich.

Die letzte Zeile von Tab. 8 schließlich wird an dieser Stelle noch nicht benötigt. Die Bewertung der 14 unterschiedenen Elemente in den Spalten 1 bis 14 erfolgt gemäß:

(34) $\bar{c}^{t*}_{NQ}\ \bar{y}$.

Dabei gibt $\bar{c}^{*}_{NQ}$ die Zielfunktionskoeffizienten der nichtganzzahligen Nebenbasisvariablen im optimalen LP-Tableau des GGLP-Problems wieder. Da wir die Spalten aus $\underline{\underline{N}}_{Q1}$ in den Spalten 15 und 16 von Tab. 8 nur mod $\bar{\bar{S}}_{Z1}$ reduziert haben, sind dort die beiden Komponenten von $\bar{c}^{*}_{NQ}$ unverändert eingetragen. Diese Bewertung der durch $\underline{\underline{N}}_{Q1}$ erzeugbaren Elemente aus $\mathfrak{C}_{BZ}$ wurde hier schon durchgeführt, um den Herleitungsmechanismus deutlich werden zu lassen.

Wie aus dem Beispiel hervorgeht, existieren zwar 14 unterschiedliche Vektoren $\bar{y}$, die ganzzahlige verschiedene $\bar{z}$ erzeugen, und weiterhin noch die beiden Spalten aus $\underline{\underline{N}}_{Q1}$ selbst, in der Gruppe $\mathfrak{C}_{BZ}$ sind aber nur neun der insgesamt sechzehn Bilder unterscheidbar. Diese Gruppenelemente sind in Tab. 9 wiedergegeben; sie bilden den oben unter (31) definierten Komplex K^{NQ}_{BZ}:

(242-i)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_{13}	$\frac{6}{14}$	$\frac{12}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{10}{14}$	$\frac{2}{14}$	1	$\frac{10}{14}$	$\frac{8}{14}$	0
x_{14}	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{5}{14}$	0	$\frac{11}{14}$	$\frac{13}{14}$	0
$\bar{\underset{\sim}{a}}_{1h}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	2	0	1	2	3	2	1	0
	2	4	4	0	0	2	2	4	0
$\bar{c}^{+\prime}_{NQ}$	29	58	31	60	33	56	95	97	0

Tab. 9: Festlegung von K^{NQ}_{BZ} einschließlich Bewertung der Elemente $\bar{\underset{\sim}{a}}_{1h}$ (h = 1, ... , 9)

Der hier zusätzlich angeführte Vektor $\bar{c}^{+}_{NQ}$ besteht aus Elementen c^{+}_{NQ}, die jeweils die geringsten Kosten darstellen, zu denen das Element $\bar{\underset{\sim}{a}}_{1h}$ aus den Spalten von $\underset{=}{N}_{Q1}$ herstellbar ist. So ist etwa $[0,1,2]' \in G_{BZ}$ ableitbar durch:

$$(36\text{-}\pi)\quad \frac{6}{14}\cdot\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix} + \frac{1}{14}\cdot\begin{bmatrix}-6\\-4\\16\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} \xrightarrow{\nu_S} \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$$

mit Kosten: $\frac{6}{14}\cdot 56 + \frac{1}{14}\cdot 70 = 29$

oder durch:

$$(36\text{-}\beta)\quad \frac{0}{14}\cdot\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix} + \frac{7}{14}\cdot\begin{bmatrix}-6\\-4\\16\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\-2\\8\end{bmatrix} \xrightarrow{\nu_S} \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$$

mit Kosten: $\frac{0}{14}\cdot 56 + \frac{7}{14}\cdot 70 = 35$

Kostengünstiger ist hier (36-α); entsprechend ergibt sich für $c^{+}_{NQ} = 29$. Auch dieser Vektor $\bar{c}^{+}_{NQ}$ für unser Zahlenbeispiel wird erst später benötigt; seine allgemeine Definition erfolgt unter (321-13).

Bei diesem Zahlenbeispiel ist (zufällig) die über K^{NQ}_{BZ} erzeugbare Untergruppe G^{NQ}_{BZ} (siehe [32]) gleich K^{NQ}_{BZ}. Wie man durch Anwendung der Gruppenaddition mod $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ auf die Elemente von K^{NQ}_{BZ} leicht sehen kann, führen alle möglichen Produkte immer wieder zu einem Element von K^{NQ}_{BZ}.

Zum Abschluß sei noch erwähnt, daß für das Zahlenbeispiel Hinweis (h-γ) Gültigkeit hat. Man hätte die Variable x_{14} durch:

$$x^{k}_{14} = x_{14}/2$$

substituieren und die zugehörige Spalte $\bar{\underline{a}}_{1,14}$, wie in (33) angegeben, ersetzen können. Die dann erzeugbare Gruppe G^{OB}_{NQ} hat korrespondierend mit der Ordnung 7 die halbe Ordnung von G^{OB}_{NQ} nach Tab. 8-1. Alle Rechenarbeit, die zur Erstellung von Tab. 8 notwendig ist, wird somit halbiert. Diese Gruppe lautet zum Vergleich mit Tab. (8-1):

$$(37)\quad G^{OB'}_{NQ} = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{3} \\ \bar{7} \\ \bar{1} \\ \bar{7} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{6} \\ \bar{7} \\ \bar{2} \\ \bar{7} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{2} \\ \bar{7} \\ \bar{3} \\ \bar{7} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{5} \\ \bar{7} \\ \bar{4} \\ \bar{7} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{7} \\ \bar{5} \\ \bar{7} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{4} \\ \bar{7} \\ \bar{6} \\ \bar{7} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{7} \\ \bar{0} \\ \bar{7} \end{bmatrix} \right\}$$

und ist Untergruppe von G^{OB}_{NQ} aus Tab. (8-1).

Unter Berücksichtigung der neuen Einheit 1/2 für x_{14} beinhaltet (37) die gleichen Teilbarkeitsinformationen über $\underline{N}_{Q1}$ wie G_{NQ}^{OB}. Durch Division der Nennerkomponente aller Elemente von $G_{NQ}^{OB'}$ durch 2 erhalten wir die restlichen Elemente von G_{NQ}^{OB}, abgesehen von $[0,7/14]'$, das sich aber aus den anderen Elementen mod $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ erzeugen läßt.

3. Optimierung gemischt-ganzzahliger linearer Programmierungsansätze auf gruppentheoretischer Grundlage

31. Einführung

Die Strukturanalyse von RGLP- und GGLP-Problemen auf gruppentheoretischer Basis bietet verschiedene Ansatzpunkte zum Aufbau von Optimierungsalgorithmen. Die bei GOMORY [1969] aufgezeigten Möglichkeiten für den RGLP-Fall haben prinzipiell auch für das GGLP-Problem Gültigkeit, da hier wie dort die Ganzzahligkeitsbedingungen als Kongruenz ausgehend von einer LP-Basislösung formulierbar sind. Hat man bei RGLP-Aufgaben diese Gruppengleichung für alle LP-Basisvariablen zu beachten, läßt sich für GGLP-Probleme eine entsprechende Gruppengleichung für die Teilmenge der ganzzahligen LP-Basisvariablen ableiten, wie im 2. Kapitel dieser Arbeit gezeigt wurde.

Wir werden in diesem 3. Kapitel auf zwei GGLP-Optimierungsansätze eingehen.

Einmal handelt es sich um eine Erweiterung des von GOMORY [1965; 1969] entwickelten "asymptotischen" Algorithmus zur RGLP-Optimierung auf GGLP-Probleme. Das wesentliche Merkmal dieses Verfahrens ist, daß eine Optimierung von Problem (1 -13) ohne die Berücksichtigung von Nichtnegativitätsbedingungen für die Teilmenge der LP-Basisvariablen des GGLP-Problems durchgeführt wird. Die dabei abgeleiteten Lösungen sind zulässig, wenn die rechte Seite $\bar{b}$ des Problems innerhalb eines durch die Basis B bestimmten Zulässigkeitsbereichs liegt, dessen begrenzende Hyperebenen als "Asymptoten" ange-

sehen werden können. Für die Optimierung kann ein dynamischer Programmierungsalgorithmus verwandt werden.

In einer Vielzahl von noch näher zu charakterisierenden Fällen werden durch diese asymptotische Optimierung direkt die gesuchten GGLP-Optima abgeleitet. Abgesehen davon liegt eine Eigenart dieser Optimierung darin, daß mit der Ermittlung der Optimallösung für ein bestimmtes $\bar{b}$ gleichzeitig die Optimallösungen für andere $\bar{b}$ bestimmt werden, für welche die gleiche LP-Basis zulässig ist. Dieses Kennzeichen läßt sich für parametrische Optimierung in bezug auf $\bar{b}$ wie auch für Schattenpreisuntersuchungen verwerten. Darauf werden wir im weiteren ausführlich zu sprechen kommen.

Zum zweiten werden wir auf Schnittebenenverfahren eingehen. Auf der Grundlage der gruppentheoretischen GGLP-Analyse im 2. Kapitel lassen sich die strengsten Schnittebenen ermitteln, die in einem gewissen Sinn für ein GGLP-Problem an einem LP-Eckpunkt überhaupt bestimmt werden können. Mit anderen Worten kann man über die Bestimmung der Faktorgruppe G_{BZ} und des Komplexes K_{NQ} einen Teil der konvexen Hülle der zulässigen gemischt-ganzzahligen Punkte eines GGLP-Problems ableiten.

Diese Untersuchung zeigt die prinzipiellen Möglichkeiten auf, den Zulässigkeitsbereich des GGLP-Problems, der als Polyeder aufgefaßt werden kann, durch lineare Ungleichungen zu beschreiben, die zu gemischt-ganzzahligen Eckpunkten führen, und diese Hyperebenen durch Anwendung des gruppentheoretischen Instrumentariums numerisch zu bestimmen. Insofern wird hier ein Verknüpfungspunkt gegeben, über den sich GOMORY's ausführlicher Polyederansatz für das RGLP-Problem zu einer entsprechen-

den Analyse auch des GGLP-Problems ausbauen läßt.

Im Gegensatz zum asymptotischen Algorithmus liegt ein wesentlicher Vorteil dieser auf Schnittebenen basierenden Verfahren darin, in der gleichen einfachen Form wie in der LP-Optimierung eine parametrische Abwandlung der GGLP-Zielfunktion handhaben zu können.

Zahlenbeispiele werden sowohl die Sensitivitätsanalyse für die rechte Seite $\bar{b}$ als auch für die Zielfunktionskoeffizienten $\bar{c}$ des GGLP-Problems veranschaulichen.

32. Gruppenminimierungsproblem

321. Asymptotische gemischt-ganzzahlige lineare Programmierung

(a) Vorbemerkung

Für dieses Kapitel wird die Theorie der asymptotischen RGLP-Optimierung als bekannt vorausgesetzt. Ausführliche Darstellungen der Grundlagen dieser Theorie finden sich bei GOMORY [1969, S. 459-467], HU [1969, S. 325-354] und SHAPIRO [1968-1]. Weitere ähnliche Untersuchungen stammen von GLOVER [1966] und WHITE [1966].

Das Gruppenminimierungsproblem als zentraler Optimierungsansatz im Rahmen dieses Vorgehens läßt sich als Suche nach dem kürzesten Pfad in einem Graphen interpretieren. Es ähnelt damit der Struktur des Knapsack-Problems, da über der Faktorgruppe G_{BZ} eine Kongruenz gegeben ist. Für diese Fragestellungen waren Algorithmen schon bekannt, bevor man die Gruppenoptimierung für ganzzahlige lineare Programmierung verwandte. Insbesondere sind dynamische Programmierungsansätze geeignet, das Gruppenoptimierungsproblem zu lösen. Auf die Funktionsweise und Interpretation dieser Rekursionsverfahren wird hier nicht eingegangen.

Um jedoch den Ablauf des Optimierungsansatzes insgesamt deutlich werden zu lassen, werden die zusätzlichen Schritte, die zu einer Verallgemeinerung des asymptotischen Algorithmus

auf eine Anwendung bei der GGLP-Optimierung notwendig sind, im Gesamtrahmen der jeweils knapp wiederholten von der RGLP-Optimierung bei GOMORY [1969] übernommenen Stufen des Algorithmus diskutiert.

Neben dieser ablauftechnischen Darstellung des Verfahrens bilden Beweise für die Äquivalenz der gefundenen Optimallösung mit der gesuchten GGLP-Optimallösung und Zulässigkeitsuntersuchungen über den LP-Basisteil der gesamten Variablen einen weiteren Schwerpunkt dieses Kapitels.

Im weiteren wird mit der Verwendung eines Gruppenoptimierungsalgorithmus als entscheidender Optimierungsprozedur im Rahmen des asymptotischen Algorithmus die grundsätzliche Möglichkeit aufgezeigt, Ganzzahligkeitsbedingungen in GGLP-Aufgaben gruppentheoretisch zu formulieren und diese Formulierung algorithmisch auszunutzen. Es bleibt dabei ein Problem ausgeklammert, das sich gleichermaßen bei der Anwendung von Gruppenoptimierungsalgorithmen im Rahmen der asymptotischen RGLP-Optimierung stellt, nämlich das Problem der Nichtbeachtung von Nichtnegativitätsbedingungen für die LP-Basisvariablen der GLP-Aufgabe.

Dieser Fragenkreis macht umfangreiche weitere Untersuchungen notwendig. Hinweise dazu finden sich z.B. bei SHAPIRO [1968-1, 1968-2] und KORTE [1970, S. 49]. Gruppentheoretisch gewonnene Informationen in asymptotischen GLP-Algorithmen lassen sich in verschiedenartiger Weise ausnutzen. Denkbar ist etwa eine Erweiterung des Gruppenoptimierungsalgorithmus durch zusätzliche Testkriterien für die Prüfung der Nichtnegativitätsbedingungen oder die Ermittlung alternativer Opti-

ma oder Suboptima mit Gruppenoptimierungsansätzen, deren zugeordnete Lösungen nacheinander auf Verletzung der Nichtnegativitätsbedingungen geprüft werden können (SHAPIRO [1968-1, 1968-2]).Möglich ist weiterhin eine Verwendung von Verfahren der impliziten Enumeration (SHAPIRO [1968-2, S. 946]) oder branch-and-bound Methoden (KORTE [1970, S. 49]) im Anschluß an die asymptotische Optimierung. Damit können in diesen Suchalgorithmen dann erheblich aufbereitete Informationen über die Struktur der GLP-Aufgabe verwertet werden.

Der Verweis auf diese Erweiterungsmöglichkeiten mag deutlich machen, daß die Ausklammerung von Nichtnegativitätsbedingungen im Grundkonzept der asymptotischen Programmierung nicht besagt, daß beim Entwurf geschlossener ganzzahliger Optimierungsalgorithmen auf der Grundlage des asymptotischen Ansatzes Nichtnegativitätsbedingungen für die LP-Basisvariablen zwangsläufig vernachlässigt werden müssen.

(b) Formulierung und Interpretation der asymptotischen GGLP-Aufgabe

Die zu unserem GGLP-Problem (1 -13) asymptotische Aufgabe entsteht dadurch, daß man aus (1 -13) die Nichtnegativitätsbedingungen für die Basisvariablen des LP-Optimums unberücksichtigt läßt. Das asymptotische GGLP-Problem lautet also wie (1 -13), nur ist Bedingung:

(1 -13-v) $\bar{x}_{BZ} \geq 0$, $\bar{x}_{BQ} \geq 0$

zu eliminieren. Bei Wegfall der Nichtnegativitätsbedingung für $\bar{x}_{BQ}$ kann das gesamte Gleichungssystem (1 -13-ß), das nur die Informationen über die Abhängigkeit der nichtganzzahligen Basisvariablen von den freien Nichtbasisvariablen wiedergibt, als Nebenbedingung entfallen.

Für die an die LP-Optimierung anschließende Ganzzahligkeitsphase verbleibt somit Kongruenz (1 -13-α), die wir im weiteren durch die äquivalente Formulierung (232-16) ersetzen wollen. Das asymptotische GGLP-Problem lautet jetzt:

$$(1)\ \bar{c}'^{*}_{NZ}\ \bar{x}_{NZ} + \bar{c}'^{*}_{NQ}\ \bar{x}_{NQ} \rightarrow \text{Min}$$

$$\nu_S(\underline{N}_{Z1} \cdot \bar{x}_{NZ}) + \nu_S(\underline{N}_{Q1}\ \bar{x}_{NQ}) = \nu_S\ \underline{\bar{b}}_1$$

$$\bar{x}_{NZ} \geq \bar{0}, \quad \bar{x}_{NQ} \geq \bar{0}.$$

Es handelt sich um ein Gruppenoptimierungsproblem, da im Nebenbedingungssystem Addition mod $\bar{S}_{Z1}$ definiert ist.

Bevor wir weiter auf diese Aufgabe (1) eingehen, werden an einer graphischen Darstellung allgemein der Charakter eines asymptotischen GGLP-Problems und insbesondere die aus der Vernachlässigung der Nichtnegativitätsbedingungen für die LP-Basisvariablen resultierenden Konsequenzen veranschaulicht.

Dazu betrachten wir im Raum Q^{n_E} den Zulässigkeitsbereich der eigentlichen Variablen $\bar{x}_E$ des GGLP-Problems. Dieser Begriff der "eigentlichen Variablen" wird nur in diesem Zusammenhang der graphischen Interpretation benötigt; gemeint ist mit $\bar{x}_E$ der Vektor aller ursprünglichen Variablen einer GGLP-Aufgabe, die noch in Ungleichungsform formuliert ist. Zur Herstellung unserer GGLP-Normalform (1 -1) kommen zu diesen eigentlichen Variablen in einem derartigen auf Ungleichungsgrundlage beschriebenen Optimierungsproblem noch die Schlupfvariablen hinzu.

Abb. 2 (wie auch die weiteren Abbildungen dieses Kapitels) basiert darauf, daß im ursprünglichen GGLP-Problem eine nichtganzzahlige Variable x_1, eine ganzzahlige Variable x_2 und Nichtnegativitätsbedingungen für diese Variablen gegeben sind. In dem dieser Abb. 2 zugrundeliegenden GGLP-Problem sind die vier Nebenbedingungen N_A bis N_D zu beachten.

Der LP-Zulässigkeitsbereich der Aufgabe besitzt also fünf Ecken, die durch fett eingezeichnete Punkte dargestellt sind. Die zulässigen GGLP-Lösungen liegen im Zulässigkeitsbereich auf den parallel verlaufenden Linien L. Die konvexe Hülle aller zulässigen GGLP-Punkte C wird durch die gestrichelten Linien eingegrenzt; die zugehörigen zulässigen neun Eckpunkte sind durch Kreise abgebildet.

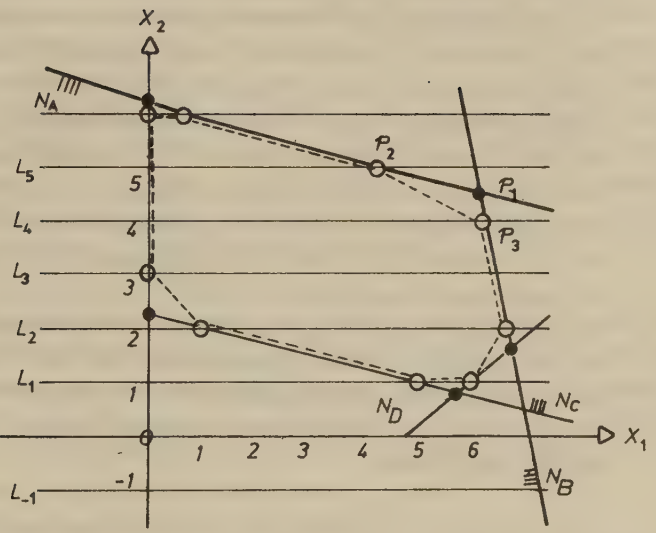


Abb. 2: GGLP-Zulässigkeitsbereich und asymptotische Optimierung

Zur weiteren Interpretation sei davon ausgegangen, daß der Punkt p_1 dem LP-Optimum des GGLP-Problems entspricht. Die mit Abb. 2 korrespondierende Basislösung besteht entsprechend aus den vier Basisvariablen: x_1, x_2 und den Schlupfvariablen von N_C, N_D. p_1 ist kein zulässiger Punkt der GGLP-Aufgabe.

Asymptotische Optimierung besagt, daß unter Vernachlässigung der Nichtnegativitätsbedingungen für die Basisvariablen der optimalen LP-Basis die freien Variablen in kostengünstigster Weise derartige nichtnegative Werte annehmen sollen, daß alle ganzzahligen Basisvariablen ganzzahlig werden. Hier sind die freien Variablen die Schlupfvariablen von N_A und N_B. Von den Basisvariablen werden nur die Informationen über die Ganzzahligkeitsstrukturen der ganzzahligen Basisvariablen verwertet. Wegfall der Nichtnegativitätsbedingungen heißt, daß im gesamten von N_A und N_B aufgespannten Bereich nach ganzzahligen Lösungen gesucht wird. Es fallen also die Nebenbedingungen N_C und N_D weg, da für deren Schlupfvariablen die Nichtnegativitätsbedingung unbeachtet bleibt, wie auch die Nichtnegativitätsbedingungen für die eigentlichen Variablen x_1 und x_2, da die Koordinatenebenen gleichfalls nicht berücksichtigt werden.

In diesem Beispiel liefert die asymptotische Optimierung direkt das (zulässige) GGLP-Optimum: für alle Zielfunktionen, für die p_1 optimale LP-Lösung ist, stellt entweder p_2 oder p_3 die optimale GGLP-Lösung dar. Die Strecke $\overline{p_1p_2}$ ist ein Teil der konvexen Hülle aller zulässigen GGLP-Punkte. Sie ist der einzige Teil der konvexen Hülle, der sich durch nichtnegative Linearkombinationen aus N_A und N_B herleiten läßt - abgesehen von den Abschnitten der konvexen Hülle, die mit N_A und N_B zusammenfallen.

Unter diesem Blickwinkel besagt asymptotische Optimierung, daß bei der Suche nach ganzzahligen Punkten die Eckpunkte der konvexen Hülle aller zulässigen GGLP-Punkte geprüft werden, die auf Hyperebenen liegen, welche durch nichtnegative

Linearkombinationen aus den im LP-Optimum streng erfüllten Nebenbedingungen ableitbar sind. Der Zulässigkeitsbereich des asymptotischen Problems wird also durch ein Polyeder gebildet, das nach einer Seite offen ist und zur anderen Seite pyramidenartig zuläuft - sofern es nicht leer ist. In unserem Beispiel Abb. 2 sind die Außen-"flächen" des Polyeders die Strecken N_A, N_B und $\overline{p_2p_3}$. Allgemein werden wir dieses Polyeder, das den Zulässigkeitsbereich des asymptotischen Problems im Raum der eigentlichen Variablen Q^{n_E} beschreibt, mit $P_{\underline{x}_E}(B,N,\bar{b})$ bezeichnen.

Die Außenflächen von $P_{\underline{x}_E}(B,N,\bar{b})$ lassen sich auf gruppentheoretischer Grundlage numerisch bestimmen. Sie sind die strengsten Schnittebenen, die an einem LP-Eckpunkt abgeleitet werden können. Grundlagen ihrer Errechnung und Möglichkeiten ihrer Verwendung in Schnittebenenverfahren werden wir im Kapitel 33. aufzeigen.

Es sei noch ein Beispiel betrachtet, bei dem die durch asymptotische Optimierung abgeleitete Lösung für das ursprüngliche GGLP-Problem unzulässig ist. Abb. 3 gibt einen solchen Fall wieder.

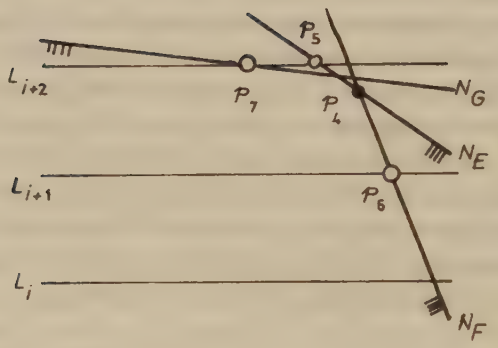


Abb. 3: Asymptotische Lösung führt zu unzulässiger GGLP-Lösung

Wenn p_4 dem LP-Optimum des Problems entspricht, ergeben sich - je nach Lage der GGLP-Zielfunktion - die asymptotischen Lösungen p_5 oder p_6. p_5 ist ein unzulässiger GGLP-Punkt, da Nebenbedingung N_G verletzt ist und die zugehörige Schlupfvariable als Basisvariable negativ ist. Die optimale Lösung mag bei p_7 liegen. Hier versagt der asymptotische Algorithmus. Allgemeine Bedingungen werden unten (321-j) zeigen, bei welchen Problemstrukturen die asymptotische Optimierung immer zum GGLP-Optimum führen muß.

(c) Umformulierung des nichtganzzahligen Nebenbasisteils

Wir werden jetzt den nichtganzzahligen Nebenbasisteil von (1) in einen für die weitere Optimierung zweckmäßige Form bringen. Das grundsätzliche Vorgehen wurde oben schon zusammenfassend beschrieben (232-e). Hier folgt jetzt eine genaue Ableitung unter Verwendung der Ergebnisse aus Kap. 242.

Den nichtganzzahligen Nebenbasisteil:

$$(2)\quad \nu_S(\underline{N}_{Q1} \quad \bar{x}_{NQ}) = \bar{g}_Q \in G_{BZ}$$

kann man wie folgt zerlegen:

$$(3)\quad \nu_S \Big[\sum_{i=1}^{|K_{NQ}|} (\underline{N}_{Q1} \quad \bar{y}_i)\, y_i + \sum_{j=1}^{n_{NQ}} (\underline{N}_{Q1} \quad \bar{e}_j)\, y_j \Big] = \bar{g}_Q .$$

Hierbei sind mit $\bar{y}_i$ die Elemente von K_{NQ} gemeint, die zur Unterscheidung mit einem Index versehen sind; $\bar{e}_j$ ist der j-te Einheitsvektor der Länge n_{NQ}.

Alle rationalen $\bar{x}_{NQ}$, die in System (2) ein bestimmtes Gruppenelement $\bar{g}_Q$ aus G_{BZ} erzeugen können, wobei höchstens n_{BZ} nichtganzzahlige Nebenbasisvariable positiv sind, lassen sich aus (3) unter Beachtung der Substitution:

$$(4)\quad \bar{x}_{NQ} = \sum_i \bar{\bar{y}}_i\, y_i + \sum_j \bar{\bar{e}}_j\, y_j \quad (y_i, y_j \in Z\ ;\ y_i,\ y_j \geq 0)$$

bestimmen. Da im ersten Term von (3) alle rationalen Linearkombinationsmöglichkeiten für $\underline{\underline{N}}_{Q1}$ wiedergegeben sind, die zu ganzzahligen Vektoren führen, sind die gesuchten Lösungsmengen von (2) und (3) unter Beachtung der Substitution (4) identisch. Da alle $\underline{\underline{N}}_{Q1}\ \bar{\bar{y}}_i$ ganzzahlig sind, wie natürlich auch die Vektoren $\underline{\underline{N}}_{Q1}\ \bar{\bar{e}}_j$ läßt sich (3) umschreiben zu:

$$(5)\quad \sum_i (\nu_S\ \underline{\underline{N}}_{Q1}\ \bar{\bar{y}}_i)\ y_i + \sum_j (\nu_S\ \underline{\underline{N}}_{Q1}\ \bar{\bar{e}}_j)\ y_j = \bar{\bar{g}}_Q .$$

Für die Kongruenzen ist Gruppenaddition mod $\bar{\bar{S}}_{Z1}$ definiert. Deshalb können wir aus System (5) allein durch modulo-Additionen alle Lösungen enumerieren, die ein vorgegebenes $\bar{\bar{g}}_Q \in G_{BZ}$ erzeugen. Diese Gruppenadditionen kann man in geeigneter Weise anhand von Graphen veranschaulichen, welche die Gruppenstruktur isomorph wiederspiegeln. Entsprechend lassen sich bei der Lösungssuche graphentheoretische Verfahren anwenden. Analoge Gedankengänge werden später bei der Gruppenoptimierung verwandt (GOMORY [1969, S. 466], HU [1969, S. 345]).

Zur Anwendung des asymptotischen Algorithmus können wir (5) weiter vereinfachen. Im allgemeinen Fall eines GGLP-Problems ist es möglich,daß mehrere Vektoren, z.B.:

(6) $\underline{\underline{N}}_{Q1}\ \bar{\underline{y}}_{k_1} \neq \underline{\underline{N}}_{Q1}\ \bar{\underline{y}}_{k_2} \neq \underline{\underline{N}}_{Q1}\ \bar{e}_{k_3}$

über den Homomorphismus ν_S auf das gleiche Element von C_{BZ} abgebildet werden. Die Resteigenschaften dieser Vektoren bezüglich $\underline{\underline{B}}_{Z1}$ unterscheiden sich also nicht. Dagegen können die Vektoren sehr wohl in den Kosten Unterschiede aufweisen, die zur Erzeugung dieses Elements notwendig sind. Diese Bewertung ergibt sich aus den Zielfunktionskoeffizienten des optimalen LP-Tableaus zum GGLP-Problem:

(7) $\bar{c}'^{*}_{NQ}\ \bar{\underline{y}}_{k_1},\ \bar{c}'^{*}_{NQ}\ \bar{\underline{y}}_{k_2},\ \bar{c}'^{*}_{NQ}\ \bar{e}_{k_3}$

Beispielsweise mag hier gelten:

$\bar{c}'^{*}_{NQ}\ \bar{\underline{y}}_{k_1} > \bar{c}'^{*}_{NQ}\ \bar{\underline{y}}_{k_2}.$

Da aus:

(8) $\nu_S\ \underline{\underline{N}}_{Q1}\ \bar{\underline{y}}_{k_1} = \nu_S\ \underline{\underline{N}}_{Q1}\ \bar{\underline{y}}_{k_2} \in C_{BZ}$

für beliebige $y_k \in Z$, $y_k \geq 0$ folgt:

(9) $(\nu_S\ \underline{\underline{N}}_{Q1}\ \bar{\underline{y}}_{k_1})\ y_k = (\nu_S\ \underline{\underline{N}}_{Q1}\ \bar{\underline{y}}_{k_2})\ y_k$

sind alle Lösungen unvorteilhafter, in denen zur Erzeugung des Elements (8) die Linearkombinationen $\bar{\underline{y}}_{k_1}$ anstelle von $\bar{\underline{y}}_{k_2}$ genommen wird.

Das asymptotische Optimierungsproblem besteht darin, die Reste der ganzzahligen Basisvariablen in möglichst kostengünstiger Weise zu eliminieren, wobei auf Nichtnegativitätsbedingungen für die Basisvariablen keine Rücksicht genommen wird. Unter Verwendung der eben durchgeführten Ableitung besagt dies, daß zur Erzeugung eines bestimmten Restes von mehreren möglichen Linearkombinationen diejenige gewählt wird, die möglichst geringe Abweichungen vom LP-Optimum des GGLP-Problems bewirkt.

Oben wurde der Komplex K_{BZ}^{NQ} definiert, der alle aus $\underline{N}_{Q1}$ gemäß (232-31) erzeugbaren Vektoren enthält, die in G_{BZ} unterscheidbar sind. Um die Beziehung zu System (5) herzustellen, kann man also sagen, daß im allgemeinen mehrere Vektoren $\underline{N}_{Q1}\ \bar{\underline{y}}_{i_h}$ $(i_h = 1_h,\ldots,r_h)$ und $\underline{N}_{Q1}\ \bar{\underline{e}}_{j_h}$ $(j_h = 1_h,\ldots,q_h)$ auf das gleiche Element $\nu_S\ \underline{N}_{Q1}\ \bar{\underline{y}}_{i_h} = \nu_S\ \underline{N}_{Q1}\ \bar{\underline{e}}_{j_h} = \bar{\underline{a}}_{1h}$ abgebildet werden können:

$$
(10)\qquad
\begin{matrix}
\underline{N}_{Q1}\ \bar{\underline{y}}_{1_h} \\
\vdots \\
\underline{N}_{Q1}\ \bar{\underline{y}}_{r_h} \\
\underline{N}_{Q1}\ \bar{\underline{e}}_{1_h} \\
\vdots \\
\underline{N}_{Q1}\ \bar{\underline{e}}_{q_h}
\end{matrix}
\quad \xrightarrow{\ \nu_S\ } \quad \bar{\underline{a}}_{1h}
$$

Die Zahl der Elemente $\bar{\underset{\sim}{a}}_{1h} \in K_{BZ}^{NQ}$ wurde oben mit p bezeichnet. (5) kann jetzt weiter umgeformt werden zu:

$$(11) \quad \sum_{h=1}^{p} \bar{\underset{\sim}{a}}_{1h} \; y_h = \bar{g}_Q .$$

Die Beziehungen zwischen (5) und (11) sind eng. Abgesehen davon, daß mit (11) alle $\bar{g}_Q \in G_{BZ}$ erzeugt werden können, die mit (5) ableitbar sind, besteht eine direkte Korrespondenz zwischen den Lösungen beider Systeme.

(12) Für ein bestimmtes $\bar{g}_Q \in G_{BZ}$:

- erhält man aus (5) eine Lösung für (11), indem man

$$(\alpha) \quad y_h := \sum_{i_h=1_h}^{r_h} y_{i_h} + \sum_{j_h=1_h}^{q_h} y_{j_h} \qquad (h = 1,\ldots,p)$$

  setzt, wobei über (α) alle Vektoren erfaßt werden, die gemäß (10) auf das gleiche h-te Element aus K_{BZ}^{NQ} abgebildet werden und
- erhält man aus (11) eine Lösung für (5), indem man nichtnegative ganzzahlige y_{i_h} und y_{j_h} derart wählt, daß:

$$(\beta) \quad \sum_{i_h=1_h}^{r_h} y_{i_h} + \sum_{j_h=1_h}^{q_h} y_{j_h} = y_h \qquad (h = 1,\ldots,p)$$

Während die Richtung (5) → (11) zu einer eindeutigen Lösung für (11) führt, gilt das umgekehrte natürlich nicht. Aus einer Lösung von (11) lassen sich also eine Menge von Lösungen der Kongruenz (5) ableiten, wobei diese Zuordnung nach (12-ß) einfach ist. Diese Beziehung läßt sich bei der Bestimmung des Polyeders $P_{\bar{x}_E}(B,N,\bar{b})$ ausnutzen.

Die Zuordnung der geringsten Kosten zu den Elementen aus K_{BZ}^{NQ} hatten wir schon am Beispiel in Kap. (242-i) gezeigt. Allgemein ergibt sich jeder Koeffizient c_{NQ}^{+h} des Kostenvektors $\bar{c}_{NQ}^{+}$ nach:

$$(13)\quad c_{NQ}^{+h} := \underset{\forall i_h,\ \forall j_h}{MIN} \{\bar{c}_{NQ}^{'*}\ \bar{\bar{y}}_{i_h},\ \bar{c}_{NQ}^{'*}\ \bar{\bar{e}}_{j_h}\} \qquad (h = 1,\ldots,p)$$

(d) Formulierung des Gruppenminimierungsproblems

Als Zwischenergebnis bis zur endgültigen Formulierung des Gruppenminimierungsproblems können wir jetzt Aufgabe (1) unter Ersetzung des nichtganzzahligen Nebenbasisteils schreiben als:

$$(14)\quad \sum_{j\in J_{NZ}} c_j^{*}\ x_j + \sum_{h=1}^{p} c_{NQ}^{+h}\ y_h \rightarrow \text{Min!}$$

$$\sum_{j\in J_{NZ}} (\nu_S\ \bar{\bar{a}}_{1j})\ x_j + \sum_{h=1}^{p} \bar{\bar{a}}_{1h}\ y_h = \nu_S\ \bar{\bar{b}}_1$$

Gleichzeitig wurde der ganzzahlige Basisteil in einer für die weiteren Betrachtungen zweckmäßigen Form abgewandelt. Die Ersetzung:

$$(15)\quad \sum_{j\in J_{NZ}} (\nu_S \bar{\underset{=}{a}}_{1j})\, x_j = \nu_S(\underset{=}{N}_{Z1}\ \bar{x}_{NZ})$$

ist zulässig, da $\underset{=}{N}_{Z1}$ und $\bar{x}_{NZ}$ ganzzahlig sind.

Zur Vereinfachung sei im weiteren die gesamte Abbildung, welche die Aufgabe (1) in Problem (14) überträgt, τ_{NQ} genannt, die Abbildung der nichtganzzahligen Nebenbasisvariablen $\bar{x}'_{NQ}$ auf die Variable $\bar{y}' = [y_1,\ldots,y_p]\,\tau^v_{NQ}$:

$$(16)\quad \tau^v_{NQ} : \bar{x}_{NQ} \to \bar{y},$$

und die Übertragung von $\underset{=}{N}_{Q1}$ in $[\bar{\underset{\sim}{a}}_{11},\ldots,\bar{\underset{\sim}{a}}_{1p}]\,\tau^a_{NQ}$:

$$(17)\quad \tau^a_{NQ} : \underset{=}{N}_{Q1} \to [\bar{\underset{\sim}{a}}_{11},\ldots,\bar{\underset{\sim}{a}}_{1h},\ldots,\bar{\underset{\sim}{a}}_{1p}]$$

Die korrespondierende Transformation von $\bar{c}'^{*}_{NQ}$ in $\bar{c}'^{+}_{NQ} = [c^{+1}_{NQ},\ldots,c^{+p}_{NQ}]$ wird mit τ^c_{NQ} bezeichnet:

$$(18)\quad \tau^c_{NQ} : \bar{c}^{*}_{NQ} \to \bar{c}^{+}_{NQ}.$$

Die Rücktransformation τ_{NQ}^{-1} muß insofern nicht eindeutig sein, als sich bei der Zuordnung entsprechend (10) mehrere Elemente ergeben können, welche die gleichen Kosten gemäß (13) verursachen. Wenn im weiteren nur ein τ_{NQ} verwandt wird, so dient das nur der Vereinfachung. Die gewonnenen Ergebnisse gelten entsprechend für jede der möglichen Abbildungen mit minimalen Kosten. Im übrigen wollen wir dieses Problem für die Gruppenoptimierung nicht weiter verfolgen, da wir über das zugrundegelegte τ_{NQ} auf jeden Fall zu einer asymptotischen Lösung kommen. Bei der Polyederbestimmung im nächsten Kapitel müssen wir auf diese Fragen noch näher zurückkommen.

Die Formulierung der Kongruenz (232-16) in der Form (14) wurde oben schon unter rein formalen Aspekten unabhängig von ihrer Herleitung zusammenfassend vorgestellt (232-23).

Da unter ν_S mehrere Spalten aus $\underline{\underline{N}}_{Z1}$ auf ein Element von C_{BZ} abgebildet werden können und/oder die Bilder dieser Spalten schon Elemente des Komplexes K_{BZ}^{NQ} sein können, ist eine weitere Verdichtung analog zu der im Abschnitt (c) beschriebenen Weise notwendig.

Die insgesamt aus den $\nu_S \bar{\underline{\underline{a}}}_{1j}$ und $\bar{\underline{a}}_{1h}$ gebildete Teilmenge von C_{BZ} sei als der Komplex K_{BZ}^{N} bezeichnet:

$$(19)\quad K_{BZ}^{N} := \{\nu_S \bar{\underline{\underline{a}}}_{1j} \mid j \in J_{NZ}\} \cup \{\bar{\underline{a}}_{1h} \mid h \in \{1,\ldots,p\}\}$$

$$= K_{BZ}^{NZ} \cup K_{BZ}^{NQ}.$$

Die Zahl der Elemente von K^N_{BZ} sei mit:

(20) $q := |K^N_{BZ}|$

definiert, die Elemente selbst durch $\bar{g}_i$ wiedergegeben:

(21) $K^N_{BZ} = \{\bar{g}_i \mid i = 1,\ldots,q\}$.

Vektoren $\bar{\underline{a}}_{1j}$, die auf das gleiche Element $\bar{g}_i \in K^N_{BZ}$ abgebildet werden, sollen mit $\bar{\underline{a}}_{1j_i}$, ihre Zahl mit t_i bezeichnet werden:

(22) $\bar{\underline{a}}_{11_i}$ ⋮ $\bar{\underline{a}}_{1j_i}$ ⋮ $\bar{\underline{a}}_{1t_i}$ $\xrightarrow{\nu_S}$ g_i $\quad (j_i \in J_{NZ})$

Bei der Zuordnung der geringsten Kosten zu einem Element $\bar{g}_i$ sind die Spalten $\bar{\underline{a}}_{1j}$ aus $\underline{N}_{Z1}$ zu berücksichtigen und weiterhin die Spalten $\bar{\underline{a}}_{1j}$ aus $\underline{N}_{Q1}$ in der beschriebenen indirekten Form über $\bar{\underline{a}}_{1h}$. Die günstigsten Kostenfaktoren c^o_i der Elemente $\bar{g}_i \in K^N_{BZ}$ ergeben sich somit als:

(23) $c^o_i = \text{Min}\left\{\text{Min}\left[c^*_{j_i} \mid \nu_S\, \bar{\underline{a}}_{1j_i} = \bar{g}_i \;(j_i = 1_i,\ldots,t_i)\right],\right.$

$\left.\left[c^{+h}_{NQ} \mid \bar{\underline{a}}_{1h} = \bar{g}_i \;(h \in \{1,\ldots,p\})\right]\right\}$.

$(i = 1,\ldots,q)$

Zusammengefaßt lautet das Ergebnis wie folgt. Der Nebenbasisteil der optimalen LP-Lösung zu einem GGLP-Problem bestimmt insgesamt den Komplex $K^N_{BZ} \subset C_{BZ}$. K^N_{BZ} enthält die Restinformationen aller Spalten aus $\underline{\underline{N}}_{1} = [\underline{\underline{N}}_{Z1}, \underline{\underline{N}}_{Q1}]$ bezüglich der Basis $\underline{\underline{B}}_{Z1}$. Die Restinformationen der ganzzahligen Nebenbasisvariablen zugehörigen Spalten erhält man - wie im RGLP-Fall -, indem die Spalten $\bar{\underline{\underline{a}}}_{1j}$ aus $\underline{\underline{N}}_{Z1}$ über ν_S mod $\bar{\underline{\underline{S}}}_{Z1}$ reduziert werden.

Die Restinformationen des nichtganzzahligen Nebenbasisteils kann man nicht in dieser einfachen Form herleiten. Vielmehr gilt es, zuerst alle möglichen rationalen Linearkombinationen für die Spalten $\bar{\underline{\underline{a}}}_{1j}$, aus $\underline{\underline{N}}_{Q1}$ zu bestimmen, die mit höchstens n_{BZ} positiven Linearfaktoren ganzzahlige Vektoren $\bar{\underline{z}}$ erzeugen. Über die Ermittlung kann man eine minimale Bewertung der in C_{BZ} unterscheidbaren Vektoren $\nu_S \bar{\underline{z}} = \bar{\underline{a}}_{1}$ vornehmen (13).

Aus dieser Bewertung aller Elemente von K^{NQ}_{BZ} schließlich, läßt sich unter Zusammenfassung mit dem ganzzahligen Nebenbasisteil eine minimale Bewertung der Elemente von K^N_{BZ} durchführen (23).

Das Gruppenmimimierungsproblem als Ziel der bisherigen Ableitungen in diesem Kapitel lautet jetzt:

$$\sum_{i=1}^{q} c_i^o \; u_i \rightarrow \text{Min}$$

(24) GRUPPENMINIMIERUNGSPROBLEM

$$\sum_{i=1}^{q} \bar{g}_i \; u_i = \bar{g}_o$$

$$u_i \geq 0, \; u_i \in Z \; (i = 1,\ldots,q)$$

Hierbei sind die u_i ganzzahlige nichtnegative Variable und $\bar{g}_o$ ist das Bild $\nu_S \underline{\bar{b}}_1$ der rechten Seite des GGLP-Problems in G_{BZ}. In (24) wie auch in (1) ist Gruppenaddition mod $\bar{S}_{Z1}$ definiert.

Zusammenfassend sei die Übertragung von Problem (14) in (24) mit τ bezeichnet, die der Variablen $[\bar{x}'_{NZ}, \bar{y}']$ in $\bar{u}' = [u_1,\ldots,u_q]$ mit τ^v:

$$(25)\quad \tau^v : [\bar{x}'_{NZ}, \bar{y}'] \to \bar{u}',$$

die von $[\nu_S \underline{N}_{Z1}, \underline{\bar{a}}_{11},\ldots,\underline{\bar{a}}_{1p}]$ in $[\bar{g}_1,\ldots,\bar{g}_i,\ldots,\bar{g}_q]$ mit τ^a:

$$(26)\quad \tau^a : [\nu_S \underline{N}_{Z1}, \underline{\bar{a}}_{11},\ldots,\underline{\bar{a}}_{1p}] \to [\bar{g}_1,\ldots,\bar{g}_q].$$

Die korrespondierende Transformation von $[\bar{c}'^{*}_{NZ}, \bar{c}'^{+}_{NQ}]$ in $\bar{c}'^{o} = [c^o_1,\ldots,c^o_q]$

ist mit τ^c definiert:

$$(27)\quad \tau^c : [\bar{c}'^{*}_{NZ}, \bar{c}'^{+}_{NQ}] \to \bar{c}'^{o}.$$

τ^{-1} muß wie τ^{-1}_{NQ} nicht eindeutig sein; die weiteren Aussagen gelten dann entsprechend für jede der möglichen Abbildungen.

(e) Korrespondenz zwischen Gruppenoptimierungsproblem und GGLP-Problem

Die aus dem allgemeinen GGLP-Problem hergeleitete Gruppenoptimierungsaufgabe (24) hat die gleiche Struktur wie die für den RGLP-Fall (z.B. GOMORY [1969, Kap. 1]). Nur sind hier bei der Herleitung für die Einbeziehung des nichtganzzahligen Nebenbasisteils zusätzliche Umformungen notwendig. Zunächst sei auf die Bedingungen eingegangen, unter denen das Optimum des Problems (24) die optimale Lösung unserer GGLP-Aufgabe liefert.

$\bar{\underline{x}}$ sei eine Optimallösung unseres GGLP-Problems (1 -1). Der optimale GGLP-Zielfunktionswert ist dann:

$$(28)\quad ZIEFU_{GGLP} = \bar{\underline{c}}' \; \bar{\underline{x}}.$$

Bei der Auflösung des Problems nach der optimalen LP-Basis läßt sich (28) vollständig als Funktion des LP-Nebenbasisteils ausdrücken:

$$ZIEFU_{GGLP} = \bar{\underline{c}}_B' \; B^{-1} \; \bar{b} - \bar{\underline{c}}_N'^{*} \; \bar{\underline{x}}_N$$

(29)

$$= ZIEFU_{LP} - \bar{\underline{c}}_{NZ}'^{*} \; \bar{\underline{x}}_{NZ} - \bar{\underline{c}}_{NQ}'^{*} \; \bar{\underline{x}}_{NQ}$$

Aus $\underline{\bar{x}}_N$ läßt sich eine Lösung des Gruppenminimierungsproblems (24) herleiten über:

(30) $\begin{bmatrix} \underline{\bar{x}}_{NZ} \\ \underline{\bar{x}}_{NQ} \end{bmatrix} \xrightarrow{\tau^v_{NQ}} \begin{bmatrix} \underline{\bar{x}}_{NZ} \\ \underline{\bar{y}} \end{bmatrix} \xrightarrow{\tau^v} \underline{\bar{u}}$

Da bei diesen und den korrespondierenden Abbildungen τ^c_{NQ} (18) bzw. τ^c (27) die Bedingungen (13) bzw. (23) beachtet werden, folgt:

(31) $\bar{c}'^*_N \; \underline{\bar{x}}_N \geq \bar{c}'^0 \; \underline{\bar{u}}$

Umgekehrt läßt sich aus einer Minimallösung $\underline{\bar{u}}$ der Aufgabe (24) über die inversen Abbildungen $(\tau^v)^{-1}$ und $(\tau^v_{NQ})^{-1}$ $\underline{\bar{x}}_B = B^{-1}\,\bar{b} - B^{-1}\,N\,\underline{\bar{x}}_N$ eine gemischtganzzahlige, nicht notwendig zulässige, Lösung $\underline{\bar{x}}$ der GGLP-Aufgabe (1 -1) ermitteln, die zum Zielfunktionswert:

(32) $\bar{c}' \; \underline{\bar{x}} = ZIEFU_{LP} - \bar{c}'^*_N \; \underline{\bar{x}}_N$

führt. Bei dieser Lösung gilt im Gegensatz zu (31):

(33) $\bar{c}'^*_N \; \underline{\bar{x}}_N = \bar{c}'^0 \; \underline{\bar{u}}.$

Da $\underline{\bar{u}}$ eine Minimallösung von (24) ist, ergibt die Abschätzung gegenüber (31):

(34) $\bar{c}'^{*}_{N} \; \bar{x}_{N} \geq \bar{c}'^{0} \; \bar{u} \geq \bar{c}'^{0} \; \bar{u}$

Aus (29), (32) und (34) folgt jetzt:

(35) $ZIEFU_{GGLP} = ZIEFU_{LP} - \bar{c}'^{*}_{N} \; \bar{x}_{N} \leq \bar{c}' \; \bar{x}.$

Sofern für den Basisteil $\bar{x}_{B}$ der optimalen LP-Lösung des GGLP-Problems über $\bar{u}$ Reste abgeleitet werden, die $\bar{x}_{B} \geq 0$ belassen, hat man mit einer asymptotischen Lösung gleichzeitig eine optimale GGLP-Lösung ermittelt.

Das Ergebnis dieses Abschnitts ist im folgenden Satz zusammengefaßt, der in strenger Analogie zu den entsprechenden Aussagen bei der RGLP-Optimierung (GOMORY [1969, S. 461], HU [1970, S. 332]) steht.

(36) Satz: Korrespondenz asymptotisches und ursprüngliches GGLP-Problem

$\bar{u}$ sei eine Minimallösung des Gruppenoptimierungsproblems (24). Über $(\tau^{v})^{-1}$ und $(\tau^{v}_{NQ})^{-1}$ ist dieser Lösung ein Wert $\bar{x}_{N}$ für die LP-Nebenbasisvariablen des GGLP-Problems zugeordnet. Die daraus ableitbare GGLP-Lösung $\bar{x}' = [\bar{x}'_{B}, \bar{x}'_{N}]$ ist eine Optimallösung von (1 -1), wenn $\bar{x}_{B} = B^{-1} \; \bar{b} - B^{-1}. N \; \bar{x}_{N} \geq 0.$

******

Wir hatten oben angedeutet, daß τ_{NQ}^{-1} und τ^{-1} nicht notwendig eindeutig sind. Wenn Mehrdeutigkeit vorliegt, kann man über jedes der möglichen τ_{NQ}^{-1} und τ^{-1} aus einer asymptotischen Lösung GGLP-Lösungen herleiten, die sich dann unterscheiden können. Wegen möglicher linearer Abhängigkeiten im nichtganzzahligen Nebenbasisteil müssen sich die über unterschiedliche τ_{NQ} ermittelten GGLP-Lösungen nicht unterscheiden. Auf diese speziellen Probleme werden wir nicht eingehen. Die grundsätzlichen Probleme der Mehrfachoptimalität sind im RGLP- und GGLP-Fall ähnlich. Wir wollen diese allgemeinen Fragen gleichfalls nicht näher untersuchen; zu den Auswirkungen der Mehrfachoptimalität in diesem Zusammenhang lassen sich weitere Aussagen z.B. aus Beziehungen herleiten, die bei GOMORY [1969, S. 457] angeführt sind.

Bevor wir auf die Optimierung des Gruppenminimierungsproblems eingehen, sollen einige Untersuchungen über die Existenz von asymptotischen Lösungen und notwendige Bedingungen für die Zulässigkeit daraus abgeleiteter GGLP-Lösungen angestellt werden.

(f) Notwendige Bedingungen für die Existenz von GGLP-Lösungen

Mit Hilfe der Kongruenzbedingung im Gruppenoptimierungsproblem (24) lassen sich notwendige Bedingungen für die Existenz zulässiger GGLP-Lösungen formulieren.

Alle durch die Anwendung der Gruppenaddition mod $\bar{S}_{Z1}$ auf Elemente von K_{BZ}^{N} erzeugbaren Elemente bilden eine Untergruppe aus G_{BZ}. Diese sei mit G_{BZ}^{N} bezeichnet. Eine einfache Defini-

tion dieser Untergruppe ist ihre Darstellung als direktes Produkt aller durch die einzelnen Elemente $\bar{g}_j \in K^N_{BZ}$ erzeugbaren zyklischen Untergruppen $\{\bar{g}_j\} \subset G_{BZ}$:

$$(37)\quad G^N_{BZ} := \{\bar{g}_1\} \oplus \ldots \oplus \{\bar{g}_j\} \oplus \ldots \oplus \{\bar{g}_q\}$$

$$(q = |K^N_{BZ}|)$$

Notwendige Bedingung dafür, daß ein GGLP-Problem mit rechter Seite $\bar{b}$ eine zulässige Lösung besitzt, ist:

$$(38)\quad \nu_S\, P_1\, \bar{b} = \nu_S\, \bar{\bar{b}}_1 = \bar{g}_o \in G^N_{BZ}$$

Wenn $\bar{g}_o$ nicht Element von G^N_{BZ} ist, lassen sich die Kongruenz in (24) und damit auch (232-16) nicht erfüllen. Mit anderen Worten können die Nebenbasisvariablen der optimalen LP-Lösung des Problems nicht die durch $\bar{b}$ vorgegebenen Reste der Basisvariablen eliminieren. In der graphentheoretischen Interpretation des GGLP-Problems besagt dies, daß der durch $\bar{b}$ bestimmte Knoten im durch die Gruppe G_{BZ} festgelegten Graphen nicht vom Ursprung des Graphen über die durch den Nebenbasisteil erzeugten Kanten erreichbar ist. Die Aussagen lassen sich verallgemeinern.

(39) Satz: Hinreichende Bedingung für leeren Zulässigkeitsbereich eines GGLP-Problems

Ein GGLP-Problem besitzt für alle rechten Seiten $\bar{b}$ keine zulässige Lösung, für die:

$$\nu_S \; P_1 \; \bar{b} \quad \notin C^N_{BZ}$$

gilt.

******

Umgekehrt darf man daraus, daß eine rechte Seite $\bar{b}$ Bedingung (38) erfüllt, nicht auf einen nichtleeren Zulässigkeitsbereich des Problems schließen. Neben der Kongruenz, die nur die Ganzzahligkeitsinformationen des Problems beinhaltet, sind ja noch die Nichtnegativitätsbedingungen der Variablen zu beachten. In einem GGLP-Problem etwa, dessen Zulässigkeitsbereich dem in Abb. 4 durch die fetten Punkte begrenzten Dreieck entspricht, ist für jeden dieser Extrempunkte die Kongruenz in (24) und damit Bedingung (38) erfüllbar. Bei Annahme der optimalen LP-Lösung im Extrempunkt p_8 z.B. sind die beiden durch Kreise dargestellten Punkte potentielle asymptotische Lösungen; für das GGLP-Problem ist Bedingung (38) gegeben. Dennoch hat das Problem, wie ersichtlich, keine zulässige GGLP-Lösung.

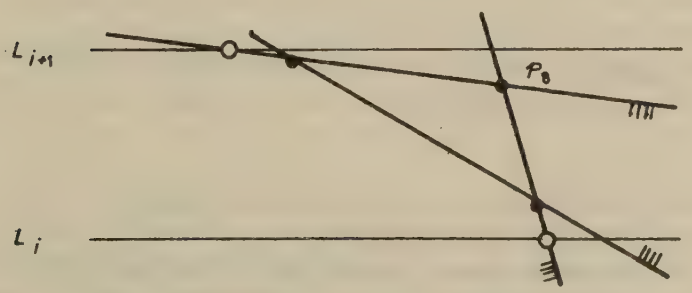


Abb. 4: Ganzzahligkeitskongruenz ohne Existenz zulässiger Lösungen erfüllbar

In Abb. 5 schließlich wird ein Beispiel vorgestellt, bei dem die Ganzzahligkeitskongruenz nicht für beliebige $\bar{b}$ erfüllt werden kann.

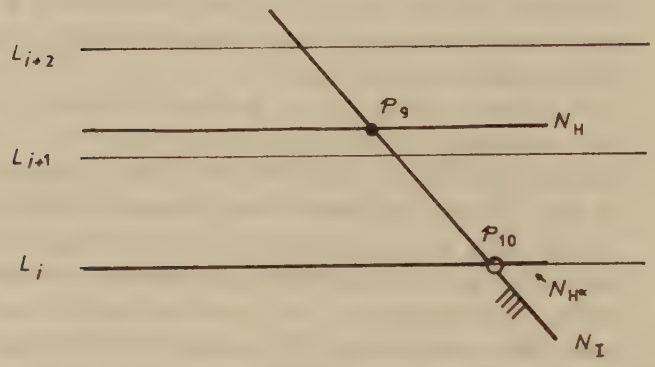


Abb. 5: Ganzzahligkeitskongruenz nicht für beliebige $\bar{b}$ erfüllbar

Nebenbedingung N_H ist hier eine Gleichung, Nebenbedingung N_I Ungleichung. Wie auch immer die freie Variable, die Schlupfvariable von N_I, im LP-Optimum p_9 des Problems festgelegt wird, es läßt sich kein zulässiger GGLP-Punkt finden. Der Grund liegt darin, daß N_H keine der gemischt-ganzzahlige Punkte in der Ebene darstellenden Parallelen schneidet.

In diesem Zusammenhang ist ein weiterer Aspekt der gruppentheoretischen Analyse des GGLP-Problems interessant. Die Gruppe G_{BZ} wie auch der Komplex K^{N}_{BZ} werden unabhängig von einer bestimmten rechten Seite der zugrundeliegenden GGLP-Aufgabe bestimmt. In ihre Ermittlung gehen mit der Koeffizientenmatrix $A = [B,N]$ nur die Informationen über das gegenseitige Verhältnis der Gradienten der Hyperebenen ein, in denen der optimale GGLP-Punkt liegt; von Degeneration sei bei dieser Interpretation abgesehen. Somit erhält man etwa aus den Steigungsinformationen über die der Abb. 5 zugrundeliegende GGLP-Aufgabe die Erkenntnis, daß die Aufgabe nicht für beliebige $\bar{b}$ gelöst werden kann, sondern nur für solche, die zu einer Lage von N_H führen, welche mit einer der Linien L_i zusammenfällt, wie etwa N_{H*}.

Die Veranschaulichung höherdimensionaler Problemstellungen an zweidimensionalen Abbildungen hat oft Mängel. In Abb. 5 ergibt sich hier der unbeabsichtigte Effekt, daß immer dann, wenn für ein $\bar{b}$ Bedingung (38) erfüllt ist, dies aus dem trivialen Grund geschieht, daß $\bar{b}$ über ν_S auf das Nullelement von G_{BZ} abgebildet wird. Bei derartigen $\bar{b}$ ist also die GGLP-Aufgabe auch schon in ihrer optimalen LP-Lösung zulässig (siehe p_{10}). Im allgemeinen, mehr als zweidimensionalen Fall muß das natürlich nicht sein.

Die Zulässigkeitsuntersuchungen in diesem Abschnitt veranschaulichten unsere analytisch hergeleiteten Ergebnisse. Damit ist nichts über das Gewicht gesagt, das diesen Bedingungen bei der rechnerischen Lösung von GGLP-Aufgaben zukommt. Wenn ein GGLP-Problem z.B. nur Nebenbedingungen in Ungleichungsform besitzt und eine optimale LP-Lösung des Problems existiert, wie das bei einer Vielzahl von praktischen Aufgabenstellungen

der Fall sein wird, dann läßt sich immer auch Kongruenz (232-16) erfüllen. Dies ist keine hinreichende Bedingung für die Existenz zulässiger GGLP-Lösungen, da weiterhin Nichtnegativitätsbedingungen für die Variablen zu beachten sind.

(g) Zur Lösung des Gruppenoptimierungsproblems

Zur Lösung des Gruppenoptimierungsproblems lassen sich die gleichen Verfahren verwenden, die auch für die Gruppenoptimierung im RGLP-Fall Anwendung finden, da unsere aus den allgemeinen GGLP-Problemen hergeleitete Aufgabe (24) die gleiche Gestalt besitzt, wie die von GOMORY [1965; 1969] für den RGLP-Fall formulierte.

In der graphentheoretischen Interpretation zeigt sich die allgemeine und bekannte Struktur dieser Optimierungsaufgabe als Suche nach dem kürzesten Pfad in einem bewerteten Graphen. Grundsätzlich lassen sich für die Lösung von (24) demnach alle Algorithmen zur Bestimmung des kürzesten Weges in solchen Graphen verwenden, die eine dem Gruppenoptimierungsproblem isomorphe Struktur haben.

Ein speziell auf Problemstellung (24) zugeschnittenes dynamisches Programmierungsverfahren wurde von GOMORY selbst vorgeschlagen [1969, S. 465-466, S. 512-514]. Ein anderer, gleichfalls dynamischer Programmierungsalgorithmus stammt von HU [1968; S. 12-23; Wiederabdruck: 1969, S. 348-354]. Dieses zweite Verfahren ist allerdings nur für zyklische Gruppen G_{BZ} anwendbar.

Für bestimmte Problemstrukturen ist die Zahl notwendiger Rechenoperationen bei HU's Algorithmus kleiner als bei GOMORY's Ansatz. Die diesen Vergleich betreffende zusammenfassende Kritik bei HU [1969, S. 354] kann den Eindruck entstehen lassen, HU's Verfahren sei immer günstiger als das von GOMORY konzipierte. Dies ist jedoch nicht richtig. Wenn die Zahl der Elemente von K^{N}_{BZ} (20) nämlich kleiner ist als die Ordnung $d = |\det B_{Z1}|$ von C_{BZ}, ist die Zahl notwendiger Additionen und Vergleiche bei GOMORY's Algorithmus statt d^2 jeweils nur $q \cdot d < d^2$. Die Zahl der Rechenoperationen bei dem Verfahren von HU ist dagegen unabhängig von q [1969, S. 348]. Bei den von HU vorgenommenen Abschätzungen für die Zahl der notwendigen Rechenoperationen in GOMORY's dynamischem Programmansatz sollte deshalb d^2 (bei HU: D^2) durch $q \cdot d$ ersetzt werden.

Weitere Gruppenoptimierungsalgorithmen, die dynamische Programmierung verwenden, stammen von SHAPIRO [1968-1: GTIP-1; 1968-2: GTIP-2]. GTIP-1 stellt eine Erweiterung eines für die Lösung des Knapsack-Problems entworfenen Optimierungsverfahrens dar. GTIP-2 hat das besondere Merkmal, die Nichtnegativitätsbedingungen für die LP-Basisvariablen in gewissen Grenzen zu beachten; zu diesem Zweck wird im Laufe des Algorithmus die Größe der durch den Nebenbasisteil erzeugten Ganzzahligkeitskorrektur überprüft.

Wie schon erwähnt, haben Gruppenoptimierungsalgorithmen das Merkmal, mit der asymptotischen Lösung für ein bestimmtes $\bar{b}$ gleichzeitig die asymptotischen Lösungen für andere rechte Seiten eines GGLP-Problems zu ermitteln, und zwar werden genau für alle rechten Seiten die asymptotischen GGLP-Optima ermittelt, für welche die optimale LP-Basis des GGLP-Problems unverändert bleibt.

Bei GOMORY's und SHAPIRO's Algorithmen gilt dieses Merkmal uneingeschränkt. HU's Verfahren dagegen kann schon die asymptotische Lösung für ein bestimmtes $\bar{b}$ gefunden haben, bevor man die Lösungsinformationen für andere $\bar{b}$ im eben dargestellten Sinn gewonnen hat. Wenn man jedoch das Verfahren an diesem Punkte nicht abbricht, sondern die Gruppenoptimierung bis zum Ende des Algorithmus durchführt, erhält man gleichfalls die Lösungen für alle $\bar{b}$.

Auf unser Zahlenbeispiel werden wir später GOMORY's Rekursionsschema anwenden.

(h) Das Polyeder $P_{\bar{x}_N}(G_{BZ}, K^N_{BZ}, \bar{g}_o) = P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$

Wir hatten oben unter Abschnitt (b) das Polyeder $P_{\bar{x}_E}(B,N,\bar{b})$ eingeführt. Für die weiteren Betrachtungen, einmal Zulässigkeitsuntersuchungen zur asymptotischen Optimierung in diesem Kapitel und zum weiteren die Bestimmung eines Teils der konvexen Hülle aller zulässigen GGLP-Punkte im Kap. 33, ist es zweckmäßig, nicht von $P_{\bar{x}_E}(B,N,\bar{b})$ auszugehen, sondern den asymptotischen Zulässigkeitsbereich im Raum der Nebenbasisvariablen $\bar{x}_N$ der optimalen LP-Lösung zum GGLP-Problem zu betrachten. Dieser Zulässigkeitsbereich ist wie $P_{\bar{x}_E}(B,N,\bar{b})$ asymptotisch; er beinhaltet also nicht die Nichtnegativitätsbedingungen für die Basisvariablen. Das korrespondierende Polyeder wird mit $P_{\bar{x}_N}(G_{BZ}, K^N_{BZ}, \bar{g}_o)$ bezeichnet; zur Abkürzung werden wir im weiteren $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ schreiben.

Beide Polyeder geben den asymptotischen Zulässigkeitsbereich des gleichen GGLP-Problems:

$$(40)\quad B_Z\,\bar{x}_{BZ} + B_Q\,\bar{x}_{BQ} + N_Z\,\bar{x}_{NZ} + N_Q\,\bar{x}_{NQ} = \bar{b}$$

$$\bar{x}_{NZ} \geq \bar{0},\ \bar{x}_{NQ} \geq \bar{0}$$

$$\bar{x}_{BZ},\ \bar{x}_{NZ} \text{ ganzzahlig!}$$

wieder, nur wird einmal der Raum der eigentlichen Variablen $\bar{x}_E$ des Problems und zum anderen der Raum der Nebenbasisvariablen $\bar{x}_N$ betrachtet.

Ein graphisches Beispiel für $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ wird in Kap. 33 vorgestellt. Hier soll eine besondere Eigenschaft der Ecken dieses Polyeders bewiesen werden. Es wird sich nämlich zeigen, daß - korrespondierend zum RGLP-Fall - diese Ecken irreduzibel sind. Diese Eigenschaft wird im weiteren ausgenutzt, um hinreichende Bedingungen für die Beschaffenheit rechter Seiten $\bar{b}$ zu formulieren, für welche die asymptotische Optimierung immer auch ein GGLP-Optimum liefern muß.

Im GGLP-Fall ist der Begriff der Irreduzibilität gegenüber dem RGLP-Problem (GOMORY [1969, S. 459]) wegen der Nichtganzzahligkeit einer Teilmenge von Variablen entsprechend abzuwandeln:

(41) Def.: Irreduzibilität

Ein Punkt $\bar{\bar{x}}_N$ von $P_{\bar{\bar{x}}_N}(C_{BZ}, K^N_{BZ}, \bar{\bar{g}}_o)$ wird als irreduzibel bezeichnet, wenn für zwei Punkte $\bar{\underline{x}}_N$ und $\bar{\underline{\underline{x}}}_N$ innerhalb der Grenzen $\bar{0} \leq \bar{\underline{x}}_N \leq \bar{\bar{x}}_N$ und $\bar{0} \leq \bar{\underline{\underline{x}}}_N \leq \bar{\bar{x}}_N$ aus der Kongruenz:

$$\underline{N}_1 \; \bar{\underline{x}}_N \equiv \underline{N}_1 \; \bar{\underline{\underline{x}}}_N \pmod{\bar{S}_{Z1}}$$

immer folgt, daß $\bar{\underline{x}}_N = \bar{\underline{\underline{x}}}_N$.

******

Dieser Begriff wird anschaulicher, wenn wir ihn im Zusammenhang mit folgendem Satz interpretieren.

(42) Satz: Irreduzibilität der Eckpunkte von $P_{\bar{\bar{x}}_N}(\bar{\bar{g}}_o)$

Jeder Eckpunkt von $P_{\bar{\bar{x}}_N}(\bar{\bar{g}}_o)$ ist irreduzibel.

Beweis: Der Satz wird durch Widerspruch bewiesen.

$\bar{\bar{x}}_N$ sei Eckpunkt und reduzibel. Es gibt also Vektoren $\bar{\underline{x}}_N$ und $\bar{\underline{\underline{x}}}_N$ ($\bar{\underline{x}}_N \neq \bar{\underline{\underline{x}}}_N$, $\bar{0} \leq \bar{\underline{x}}_N \leq \bar{\bar{x}}_N$ und $\bar{0} \leq \bar{\underline{\underline{x}}}_N \leq \bar{\bar{x}}_N$) mit $\underline{N}_1 \bar{\underline{x}}_N \equiv \underline{N}_1 \bar{\underline{\underline{x}}}_N$.

Da $\bar{\bar{x}}_N$ als Eckpunkt zulässiger GGLP-Punkt ist, gilt sowohl:

$$(43)\quad \bar{\bar{g}}_o = \underline{\underline{N}}_1\ \bar{\bar{x}}_N + \underline{\underline{N}}_1\ \bar{\underline{x}}_N - \underline{\underline{N}}_1\ \bar{\underline{\underline{x}}}_N$$

$$= \underline{\underline{N}}_1\ (\bar{\bar{x}}_N + \bar{\underline{x}}_N - \bar{\underline{\underline{x}}}_N)$$

als auch:

$$(44)\quad \bar{\bar{g}}_o = \underline{\underline{N}}_1\ \bar{\bar{x}}_N - \underline{\underline{N}}_1\ \bar{\underline{x}}_N + \underline{\underline{N}}_1\ \bar{\underline{\underline{x}}}_N$$

$$= \underline{\underline{N}}_1\ (\bar{\bar{x}}_N - \bar{\underline{x}}_N + \bar{\underline{\underline{x}}}_N).$$

In den Systemen ist dabei Addition (mod $\bar{\bar{S}}_{Z1}$) definiert. Da weiterhin $\bar{\bar{x}}_N - \bar{\underline{x}}_N \geq \bar{0}$ wie auch $\bar{\bar{x}}_N - \bar{\underline{\underline{x}}} \geq \bar{0}$, gilt für die Vektoren:

$$(45)\quad \bar{\bar{x}}_1 = \bar{\bar{x}}_N - \bar{\underline{x}}_N + \bar{\underline{\underline{x}}}_N \geq \bar{0}$$

$$\bar{\bar{x}}_2 = \bar{\bar{x}}_N + \bar{\underline{x}}_N - \bar{\underline{\underline{x}}}_N \geq \bar{0}$$

Beide Vektoren erfüllen Kongruenz (232-16) und sind deshalb Punkte aus $P_{\bar{\bar{x}}_N}(\bar{\bar{g}}_o)$.

Da sich jedoch nach (45) $\bar{\bar{x}}_N$ als Linearkombination:

$$(46)\quad \bar{\bar{x}}_N = (\bar{\bar{x}}_1 + \bar{\bar{x}}_2)/2$$

der beiden Vektoren $\bar{\bar{x}}_1$ und $\bar{\bar{x}}_2$ darstellen läßt, kann $\bar{\bar{x}}_N$ nicht Eckpunkt sein. Damit müssen die Eckpunkte des Polyeders $P_{\bar{\bar{x}}_N}(\bar{\bar{g}}_o)$ also immer irreduzibel sein.

*****

Satz (42) und sein Beweis stehen in enger Beziehung zur analogen Aussage im RGLP-Problem [GOMORY (1969, S. 460)]. Die Ergebnisse dieses Satzes erscheinen in der folgenden, nur als spezielle Interpretation zu verstehenden Betrachtung sehr anschaulich.

Gesetzt den Fall, $\bar{\underset{\sim}{x}}$ sei Optimallösung eines GGLP-Problems und reduzibel. Dann hätte man zur Erfüllung der Ganzzahligkeitskongruenz mindestens nach (43) und (44) die drei Lösungsmöglichkeiten:

$$(47)\quad \bar{\underset{\sim}{x}}_N$$

$$\bar{x}_1 = \bar{\underset{\sim}{x}}_N - \bar{\underset{=}{x}}_N + \bar{\underset{\equiv}{x}}_N$$

$$\bar{x}_2 = \bar{\underset{\sim}{x}}_N + \bar{\underset{=}{x}}_N - \bar{\underset{\equiv}{x}}_N$$

mit den drei nichtnegativen Kostenwerten:

$$(48)\quad \bar{c}_N'^{*}\ \bar{\underset{\sim}{x}}_N$$

$$\bar{c}_N'^{*}\ \bar{x}_1 = \bar{c}_N'^{*}\ \bar{\underset{\sim}{x}}_N - \bar{c}_N'^{*}\ \bar{\underset{=}{x}}_N + \bar{c}_N'^{*}\ \bar{\underset{\equiv}{x}}_N$$

$$\bar{c}_N'^{*}\ \bar{x}_2 = \bar{c}_N'^{*}\ \bar{\underset{\sim}{x}}_N + \bar{c}_N'^{*}\ \bar{\underset{=}{x}}_N - \bar{c}_N'^{*}\ \bar{\underset{\equiv}{x}}_N$$

Wenn $\bar{\underset{\sim}{x}}$ jedoch in der beschriebenen Form zerlegbar ist, kann es nur optimal sein, sofern:

$$(49)\quad \bar{c}_N'^{*}\ \bar{\underset{=}{x}}_N = \bar{c}_N'^{*}\ \bar{\underset{\equiv}{x}}_N.$$

Wenn nämlich $\bar{c}_N'^* \; \bar{x}_N < \bar{c}_N'^* \; \bar{x}_N$, könnte $\bar{x}$ nicht Optimallösung sein, da $\bar{x}_2$ zu einem besseren Zielfunktionswert führt; entsprechend ist $\bar{x}_1$ eine bessere Lösung als $\bar{x}_N$, wenn

$$\bar{c}_N'^* \; \bar{x}_N > \bar{c}_N'^* \; \bar{x}_N .$$

Sofern das betrachtete GGLP-Problem keine mehrfach-optimalen Lösungen besitzt und $\bar{x}_N$ eindeutige Optimallösung ist, muß $\bar{x}_N$ also Ecklösung von $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ mit der Eigenschaft der Irreduzibilität sein, die sich hier aus einer Zielfunktionsbetrachtung ergibt.

Dieses Irreduzibilitätskriterium der ganzzahligen Programmierung ist damit in gewisser Analogie zum "Eckentheorem" der LP-Theorie zu sehen. Mit Eckentheorem ist gemeint, daß sich aus einer LP-Basis immer die rechte Seite $\bar{b}$ des LP-Problems mit reellen Linearfaktoren kombinieren läßt und bei Vorhandensein optimaler Lösungen, dann auch immer eine optimale Ecklösung gegeben sein muß. Die Ecken liegen dabei immer in m-dimensionalen Unterräumen des R^n, wobei m die Zahl der Nebenbedingungsgleichungen und n die Zahl der Variablen des LP-Problems mit $m \leq n$ ist. Die Ecken des GGLP-Problems liegen nach dem eben Gesagten in p-dimensionalen Unterräumen des R^n mit $m \leq p \leq n$. Auf diese Fragen kommen wir in Kap. 33 noch näher zurück (33-16).

(i) Zulässigkeitskriterien von Basislösungen in der Beziehung zwischen B und $\bar{b}$

Wir werden uns jetzt der Frage zuwenden, unter welchen Bedingungen das asymptotische GGLP-Optimum auf jeden Fall die Optimallösung des GGLP-Problems liefert. Aus dieser Formulierung wird schon deutlich, daß die hier aufgestellten Bedingungen zwar hinreichend sind, aber nicht immer notwendig.

Die Untersuchung baut auf der ausführlichen Zulässigkeitsanalyse für den RGLP-Fall auf (GOMORY [1969, S. 462 ff.], HU [1970, S. 332 ff.]). Diese Analyse leitet Zulässigkeitsbedingungen nicht aus der speziellen Problemstruktur ab, sondern allein aus den Irreduzibilitätseigenschaften der Ecklösungen des asymptotischen Zulässigkeitsbereichs. Daraus ergibt sich auch die verhältnismäßig schwache Zulässigkeitsaussage, die notwendigerweise - wie wir noch sehen werden - für das GGLP-Problem zu noch gröberen hinreichenden Bedingungen führt.

Ausgehend von der Zulässigkeitsuntersuchung im RGLP-Fall werden wir hier in einer Zweiteilung zunächst auf die grundsätzliche Idee der Analyse eingehen und danach anhand der Irreduzibilitätseigenschaften eine Abschätzung zulässiger $\bar{b}$ vornehmen. Wenden wir uns in diesem Abschnitt (i) zunächst dem Grundgedanken der Ableitung zu.

B sei die optimale Basis eines LP-Problems. Diese Basis ist für alle rechten Seiten $\bar{b}$ optimal, für die gilt:

$$(50)\quad \bar{x}_B = B^{-1}\ \bar{b} \geq \bar{0}$$

$\bar{b}$ ist hier als Variable aufgefaßt. Der durch eine Basis B determinierte Zulässigkeitsbereich für $\bar{b}$ bildet im $\bar{b}$-Raum eine offene "Pyramide" P_B mit der Spitze im Ursprung $\bar{b} = \bar{0}$ des Koordinatensystems (GOMORY [1969, S. 463]). Um die LP-Basis in der Ganzzahligkeitsphase ganzzahlig zu machen, ist (50) gemäß:

$$(51)\quad \bar{x}_B = B^{-1}\,(\bar{b} - N\ \bar{x}_N) \geq \bar{0}$$

zu korrigieren.

Für vorgegebenes $\bar{x}_N$ beschreibt (51) eine weitere Pyramide, deren Außen-"flächen" parallel zu den durch (50) gebildeten verlaufen, sofern dasselbe B zugrundeliegt.

In zweidimensionaler Darstellung ergeben sich z.B. für $B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ und zwei alternative N $\bar{x}_N$ die Zulässigkeitsbereiche P_B^o, P_B^1, und P_B^2 für $\bar{b}$:

$$P_B^o : B^{-1}\,\bar{b} \geq 0: \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} G_1^o : 2\,b_1 + 5\,b_2 \geq 0 \\ G_2^o : 3\,b_1 - 2\,b_2 \geq 0 \end{matrix}$$

$$P_B^1 : B^{-1}(\bar{b} - \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}) \geq 0 \Rightarrow \begin{matrix} G_1^1 : 2\,b_1 + 5\,b_2 - 7 \geq 0 \\ G_2^1 : 3\,b_1 - 2\,b_2 + 18 \geq 0 \end{matrix}$$

$$P_B^2 : B^{-1}(\bar{b} - \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}) \geq 0 \Rightarrow \begin{matrix} G_1^2 : 2\,b_1 + 5\,b_2 + 23 \geq 0 \\ G_2^2 : 3\,b_1 - 2\,b_2 + 6 \geq 0 \end{matrix}$$

Diese Bereiche sind in Abb. 6 wiedergegeben.

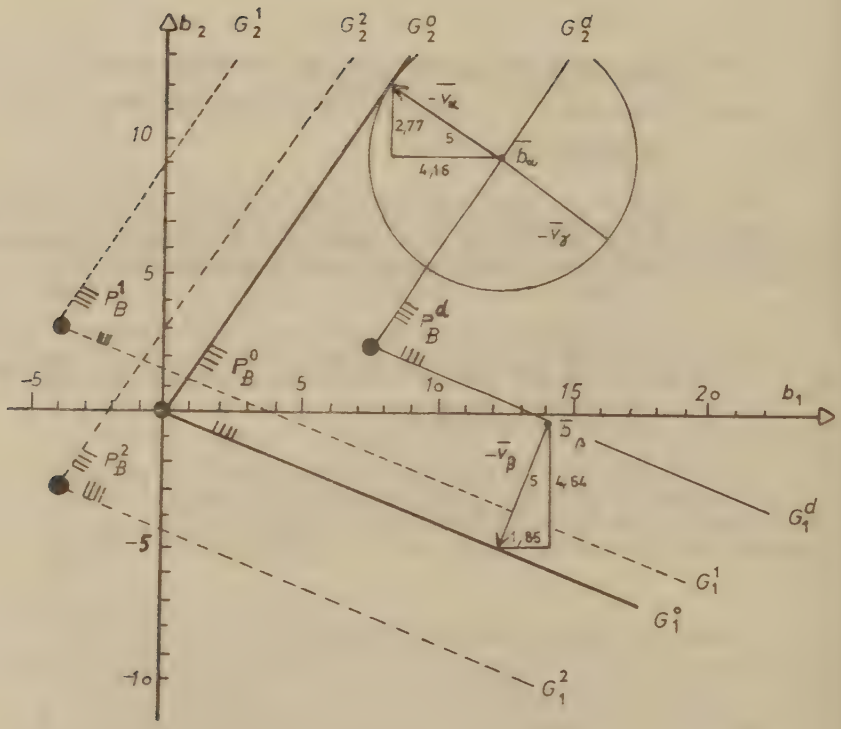


Abb. 6: Zulässigkeitsbereich für $\bar{b}$

Je nach Aussehen des Korrekturgliedes N $\bar{x}_N$ verändert sich der Bereich zulässiger $\bar{b}$, welche die Basisvariablen des Problems nach der Korrektur größer/gleich Null belassen. Für P_B^1 ist eine Klasse von $\bar{b}$ zulässig, die für P_B^0 nicht zulässig ist, und umgekehrt. Dagegen ist der gesamte Zulässigkeitsbereich P_B^0 in P_B^2 enthalten. Bei Wahl einer anderen Basis B verändern sich die Steigungen der die Zulässigkeitsbereiche begrenzenden Geraden.

Wenn man von N $\bar{x}_N$ die Steigungsinformationen vernachlässigt, oder genauer die Vorzeichen der einzelnen Komponenten dieses Vektors, gelangt man leicht zu zwar nicht notwendigen, aber doch hinreichenden Zulässigkeitsbedingungen.

Die Euklid'sche Länge d des Vektors $\bar{v} = N \quad \bar{x}_N$ ist definiert als:

$$(53)\quad d = \left\| \bar{v} \right\| = \left\| [v_1,\ldots,v_m]' \right\| = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_m^2} \quad .$$

Wie wir gleich im zweiten Teil dieser Zulässigkeitsanalyse (j) sehen werden, lassen sich aus Irreduzibilitätseigenschaften Aussagen über die maximale Länge des durch den Nebenbasisteil erzeugten Korrekturgliedes gewinnen. Der Anschaulichkeit wegen sei weiter beispielsbezogen argumentiert. Diese Länge betrage 5, wie sie etwa die Vektoren $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$ besitzen.

Ein Bereich von $\bar{b}$, der auf keinen Fall zu einer unzulässigen ganzzahligen Basislösung führen kann, ist dann eine Pyramide P_B^d, die in P_B^o einbeschrieben ist und deren Außenflächen genau den Abstand 5 von den Außenflächen des Bereichs P_B^o hat. Dieser aus d hergestellte und in P_B^o liegende Bereich sei im weiteren auch allgemein mit P_B^d bezeichnet.

Für unser Beispiel wurde dieser Zulässigkeitsbereich P_B^d über die Hesse'sche Normalform aus P_B^o berechnet:

$$(54)\quad P_B^d : \begin{matrix} G_1^d : 2\,b_1 + 5\,b_2 - 26{,}923 \geq 0 \\ G_2^d : 3\,b_1 - 2\,b_2 - 18{,}028 \geq 0 \end{matrix}$$

Für alle $\bar{b} \in P_B^d$ und alle Korrekturglieder der Länge $d \leq 5$ bleibt (51) zulässig. Die ungünstigsten Fälle sind die folgenden. Einmal kann eine rechte Seite $\bar{b} \in P_B^d$ des GGLP-Problems genau auf G_2^d liegen (siehe Abb. 6). Dann führt das zu subtrahierende Korrekturglied $\bar{v}_\sigma = \begin{bmatrix} 4.16 \\ -2.77 \end{bmatrix}$ genau zu $\bar{x}_B = \bar{0}$,

wie man aus trigonometrischen Beziehungen herleiten kann. Alle anderen Vektoren $N\,\bar{x}_N$ mit $\| N\,\bar{x}_N \| \leq 5$ - auf und innerhalb des Kreises um $\bar{b}_\alpha$ - ergeben eine korrigierte Basislösung $\bar{x}_B > 0$. Zum zweiten kann die rechte Seite $\bar{b}_\beta \in P_B^d$ auf G_1^d liegen. Hier resultiert dann aus $\bar{v}_\beta = \begin{bmatrix} 1{,}86 \\ 4{,}64 \end{bmatrix}$ für $\bar{x}_B$ der Wert $\bar{0}$.

Für alle Vektoren $\bar{v}$, $\bar{v} \neq \bar{v}_\alpha$ und $\bar{v} \neq \bar{v}_\beta$, welche höchstens die Euklid'sche Länge 5 besitzen, stellt P_B^d eine Überschätzung des Zulässigkeitsbereichs der $\bar{b}$ dar, so etwa für $\bar{v}_\gamma = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, wo P_B^1 der zulässige Bereich ist.

(j) Hinreichende Bedingung für Zulässigkeit des asymptotischen Optimums

Nach Skizzierung dieser Grundidee der Zulässigkeitsbetrachtung im Abschnitt (i) werden wir jetzt untersuchen, wie man zu einer Abschätzung der Länge des Korrekturgliedes $N\,\bar{x}_N$ gelangen kann.

Die aus einer asymptotischen Lösung von (24) ermittelten Lösungen für $\bar{x}_{NQ}$ enthalten maximal n_{BZ} positive nichtganzzahlige Variable [(242-a), (h)]. $\bar{x}_{NQ}$ läßt sich dabei in einen nichtganzzahligen und ganzzahligen Teil zerlegen (242-24,29). Der nichtganzzahlige Teil $\bar{y}$ korrespondiert immer mit einer Matrix N_{Q1}. Die Komponenten x_h von $\bar{x}_{NQ}$ seien als Brüche z_h / s_r dargestellt; s_r ist der r-te Elementarteiler der $(n_{BZ} \cdot r)$-Matrix N_{Q1}. Die Komponenten x_i von $\bar{x}_{NZ}$ sind natürlich ganzzahlig. Aus Zweckmäßigkeitsgründen sei im weiteren von $\bar{x}'_N = [\bar{x}'_{NZ}, \bar{x}'_{NQ}]$ in dieser Bruchdarstellung ausgegangen.

(55) Satz: Obergrenze Produkt aus Komponenten von $\bar{x}_N$

$\bar{x}_N$ sei ein irreduzibler Punkt von $P_{\bar{x}_N}(G_{BZ}, K_{BZ}^N, \bar{g}_o)$.

Die Komponenten x_j von $\bar{x}_N$ erfüllen dann die Ungleichung:

$$(56)\quad \prod_{j\in J_N} (1 + x_j) \le |G_{BZ}| = |\det \underline{B}_{Z1}|\,.$$

Beweis:

Zunächst sei das Zwischenergebnis bewiesen:

$$(57)\quad \prod_{i\in J_{NZ}} (1 + x_i) \cdot \prod_{h\in J_{NQ}} (1 + z_h) \le |G_{BZ}|$$

Hierbei sind die z_h die eben definierten Zähler der Komponenten $x_h = z_h/s_r$ von $\bar{x}_{NQ}$. $\underline{\bar{x}}_N$ sei ein Punkt $\bar{0} \le \underline{\bar{x}}_N \le \bar{x}_N$, dessen ganzzahlige Komponente $\underline{\bar{x}}_{NZ}$ ganzzahlig ist und dessen nichtganzzahlige Komponente über $\underline{N}_{Q1}\ \underline{\bar{x}}_{NQ}$ ganzzahlige Vektoren erzeugt. Die Maximalzahl derartiger Vektoren $\underline{\bar{x}}_N$ entspricht der linken Seite von (57). Denn jede Komponente x_i von $\bar{x}_{NZ}$ kann $(1+x_i)$ unterschiedliche ganzzahlige Werte größer/gleich Null annehmen; insgesamt ergeben sich aus $\bar{x}_{NZ}$ also genau $\prod_i (1 + x_i)$ unterschiedliche Möglichkeiten. Entsprechend gibt es für $\bar{x}_{NQ}$ maximal $\prod_h (1 + z_h)$ verschiedene Möglichkeiten. Dies folgt aus der Elementarteilereigenschaft von s_r.

Während jedoch $\prod_i (1 + x_i)$ eine genaue Zahl für unterschiedliche $\bar{x}_{NZ}$ widerspiegelt, stellt $\prod_h (1 + z_h)$ eine Obergrenze für alternative $\bar{x}_{NQ}$ mit $\bar{0} \le \bar{x}_{NQ} \le \bar{x}_{NQ}$ dar, da nicht alle $\bar{x}_{NQ}$ mit $\bar{0} \le \bar{x}_{NQ} \le \bar{x}_{NQ}$ ganzzahlige Vektoren $\underline{N}_{Q1}\ \underline{\bar{x}}_{NQ}$ erzeugen.

Da $\bar{x}_N$ irreduzibel ist, müssen sich über $\nu_S(\underline{N}_1\ \underline{\bar{x}}_N)$ für alle möglichen $\underline{\bar{x}}_N$ unterschiedliche Gruppenelemente aus G_{BZ} ergeben. Da es jedoch nur $|G_{BZ}|$ verschiedene Gruppenelemente gibt, folgt Ungleichung (57).

Die Beziehung zwischen den aus Zählern z_h und gesamten Komponenten x_h gebildeten Produkten ist:

$$(58)\quad \prod_{h\in J_{NQ}} (1 + x_h) \le \prod_{h\in J_{NQ}} (1 + z_h)$$

Im Zusammenhang mit (57) folgt der Satz.

*****

Aus dieser Festlegung einer Obergrenze für die über alle Komponenten von $\bar{x}_N$ gebildeten Produkte läßt sich direkt ein weiterer Satz folgern, der für die Eingrenzung der Länge von $N\,\bar{x}_N$ angewandt wird.

(59) Satz: Obergrenze Summe der Komponenten von $\bar{x}_N$

$\bar{x}_N$ sei ein irreduzibler Punkt von $P_{\bar{x}_N}(G_{BZ}, K^N_{BZ}, \bar{g}_o)$.
Die Komponenten x_j von $\bar{x}_N$ erfüllen dann die Ungleichung:

$$(60)\quad \sum_{j\in J_N} x_j \le |\det B_{Z1}| - 1$$

Beweis: Satz (55) ergab:

$$(61)\quad (1 + x_{m+1}) \dots (1 + x_{m+j}) \dots (1 + x_{m+n_N}) \le |\det B_{Z1}|$$

Allgemein gilt: wenn das Produkt von Variablen, die größer/gleich Eins sind, festliegt, erhält man die größtmögliche Summe dieser Variablen dadurch, daß alle Variablen bis auf

eine Eins gesetzt werden und diese eine Variable dann den Wert des Produktes annimmt.

In unserem Falle haben die Faktoren bzw. Summanden dabei die Form $(1 + x_{\sim tj})$. Unter Beachtung dieser notwendigen Substitution erhalte die Variable r den größten Wert $\underset{\sim}{x}_r$.

Dann gilt:

$$(62) \quad \sum_{j \in J_N} (1 + x_j) \leq (1 + 0) + \ldots + (1 + \underset{\sim}{x}_r) + \ldots + (1 + 0)$$

Da für die rechte Seite dieser Ungleichung (61) gilt, folgt daraus:

$$(63) \quad (1+0) \cdot \ldots \cdot (1 + \underset{\sim}{x}_r) \cdot \ldots \cdot (1 + 0) \leq |\det \underset{=}{B}_{Z1}|$$

$$(1 + \underset{\sim}{x}_r) \leq |\det \underset{=}{B}_{Z1}|$$

$$\underset{\sim}{x}_r \leq |\det \underset{=}{B}_{Z1}| - 1$$

Wenn aus (62) die Eins eliminiert wird:

$$(64) \quad \sum_{j \in J_N} x_j \leq \underset{\sim}{x}_r$$

kann man über (63) den Beweis vervollständigen:

$$(65) \quad \sum_{j \in J_N} x_j \leq \underset{\sim}{x}_r \leq |\det \underset{=}{B}_{Z1}| - 1 \; .$$

*****

Dieses Ergebnis ist plausibel. Denn wie im RGLP-Problem ist der maximale Wert, den jede - also auch nicht-ganzzahlige - Nebenvariable x_j annehmen kann, kleiner als die Ordnung p der von $\nu_S \bar{\bar{a}}_{1j}$ in G_{BZ} erzeugten Untergruppe. Man kann nämlich die gleichen Reste, die durch $\nu_S(k \cdot \bar{\bar{a}}_{1j})$, mit $k \geq p$ und $k \in Q$, produziert werden, auch über $\nu_S(l \cdot \bar{\bar{a}}_{1j})$, mit $0 \leq l < p$ und $l \in Q$, erzeugen, da:

$$(66)\quad \nu_S(l \cdot \bar{\bar{a}}_{1j}) \equiv \nu_S(k \cdot \bar{\bar{a}}_{1j}) \quad [\mathrm{mod}\ \bar{\bar{S}}_{Z1}]$$

wenn l nach:

$$(67)\quad l := k - p\ (k \dotplus p)$$

festgelegt wird; der Operator $\dotplus$ bedeute ganzzahlige Division. Über:

$$(68)\quad \nu_S[p\ (k \dotplus p)\ \bar{\bar{a}}_{1j}]$$

wird ja das Nullelement von G_{BZ} erzeugt. Da dieses mit den Spalten von B_{Z1} korrespondiert, sind die über $\nu_S\ (k \cdot \bar{\bar{a}}_{1j})$ erzeugbaren Reste in den Spalten von $\bar{\bar{B}}_{Z1}$ periodisch und wiederholen sich in Faktorabständen:

1, 1 + p, 1 + 2p, usw.

Die Summe $\sum_{j \in J_N} x_j$ kann ihre Obergrenze nur erreichen, wenn die gesamte Gruppe G_{BZ} zyklisch ist und $\sum_{j \in J_N} x_j = x_r$.

Die mit x_r korrespondierende Spalte $\bar{\bar{a}}_{1r}$ ist dann über $\nu_S\ \bar{\bar{a}}_{1r}$ erzeugendes Element von G_{BZ}.

Wir wenden diese Ergebnisse jetzt für die Abschätzung der Länge von $N\ \bar{x}_N$ an. $\bar{a}_{Max}$ sei die Spalte aus N mit maximaler Länge d_{max}. Für das Korrekturglied gilt dann:

$$(69)\quad \left\| N\ \bar{x}_N \right\| \leq d_{max} \cdot \sum_{j \in J_N} x_j \leq d_{max} \cdot (|\det \bar{\bar{B}}_{Z1}| - 1)$$

Damit haben wir im GGLP-Fall das gleiche Ergebnis wie für das RGLP-Problem (GOMORY [1969, S. 462], HU [1970, S. 332]). Zusammengefaßt lautet es:

(70) Satz: Hinreichende Bedingung für zulässige $\bar{b}$

$\bar{b}$ sei Element von $P^{\underline{d}}_{\bar{B}}$, wobei $\underline{d} = d_{Max} \cdot (|\det B_{Z1}| - 1)$ und $P^{\underline{d}}_{\bar{B}}$ das unter (h) definierte Polyeder ist. Aus der optimalen Lösung $\bar{\bar{u}}$ des Gruppenoptimierungsproblems (24) zu einem GGLP-Problem mit einer derartigen rechten Seite läßt sich über $(\tau^v)^{-1}$ und $(\tau^v_{NQ})^{-1}$ eine zugehörige Lösung $\bar{x}_{\bar{B}}$ für den LP-Nebenbasisteil des GGLP-Problems ermitteln. Für die aus $\bar{x}_N$ erzeugte Lösung $\bar{x}_B$ des LP-Basisteils der gesamten Variablen $\bar{x}' = [\bar{x}'_B , \bar{x}'_N]$ gilt dann immer:

$$(71)\quad \bar{x}_B = B^{-1}(\bar{b} - N\ \bar{x}_N) \geq \bar{0}.$$

******

Ist diese Bedingung für das RGLP-Problem schon nur hinreichend, aber nicht notwendig, so ist der Grad der Überschätzung des Zulässigkeitsbereichs von $\bar{b}$ im GGLP-Problem noch größer. Dies wird insbesondere im Beweis für Satz (59) deutlich. Die in Abb. 6 zusammengefaßten Betrachtungen zu einer anderen Ursache für diese Überschätzung gelten dagegen für das RGLP- wie für das GGLP-Problem gleichermaßen.

(k) Zusammenfassung Gruppenoptimierung

Der gesamte Ablauf eines über das Gruppenminimierungsproblem (24) arbeitenden Lösungsverfahrens für GGLP-Probleme sei hier zusammengefaßt.

Algorithmus (3): Asymptotische GGLP-Optimierung

Schritt	Behandelt in Kapitel	Beschreibung
I	(1).	Lösung des in der normierten Form (1 -1) vorliegenden GGLP-Problems als LP-Problem.
II	(23).	Ableitung der Faktorgruppe $\mathcal{C}_{BZ}$ durch Algorithmus (2). Transformation des Gesamtproblems über P.
III	(24).	Bestimmung von K_{NQ} aus dem nichtganzzahligen LP-Nebenbasisteil.
IV	(321-a)-(321-d), (242-g,i).	Bestimmung von K_{BZ}^{NQ} aus K_{NQ} und Bewertung der Elemente von K_{BZ}^{NQ} gemäß τ_{NQ}. Bestimmung von K_{BZ}^{N} aus K_{BZ}^{NQ} und $N_{=Z1}$ und Bewertung der Elemente von K_{BZ}^{N} gemäß τ.
V	(321-d).	Lösung des durch K_{BZ}^{N} bestimmten Gruppenminimierungsproblems.
VI	(321).	Ableitung der GGLP-Lösung aus der optimalen Gruppenlösung $\bar{\underline{u}}$; für: - $\bar{x}_N$ gemäß τ^{-1} und τ_{NQ}^{-1} und - $\bar{x}_B$ gemäß B^{-1} $(\bar{b} - N\ \bar{x}_N)$. Wenn $\bar{x}_B \geq \bar{0}$, wurde eine optimale GGLP-Lösung gefunden.

(1) Zahlenbeispiel

Das Zahlenbeispiel wird im weiteren in der Abfolge der Schritte (IV) bis (VI) von Algorithmus (3) beschrieben.

Schritt (IV):

Die im Rahmen der Abbildung τ_{NQ} notwendigen Operationen wurden schon unter (242-i) durchgeführt.

K_{NQ} und K_{BZ}^{NQ} sind in Tab. 9 enthalten. Die Transformation $\bar{c}^*_{NQ} \to \tau^{c}_{NQ}\, \bar{c}^*_{NQ} = \bar{c}^{+}_{NQ}$ geht aus der letzten Zeile in Tab. 9 hervor. $\tau^{\blacktriangledown}_{NQ}$ beinhaltet z.B. die Informationen, daß für die LP-Nebenvariablen des Beispiels gilt:

(72) $[x_{13}, x_{14}] = [6/14, 1/14] \to y_1 = 1$ (Numerierung der y_i nach der Spaltennummer von Tab. 9).

$[x_{13}, x_{14}] = [1, 0] \to y_6 = 1$

Wir werden jetzt auf die einzelnen Operationen eingehen, die für die Abbildung τ notwendig sind. Diese Operationen sind in Tab. 10 zusammengefaßt.

Die Bilder $\nu_S\, \bar{\underline{a}}_{1j}$ der Spalten aus $\underline{N}_{Z1}$ hatten wir oben schon in Tab. 6 hergeleitet. Diese Bilder sind in Tab. 10 in den Spalten x_6 bis x_{12} in Zeile 1 wiedergegeben. Die Zielfunktionskoeffizienten dieser ganzzahligen Nebenbasisvariablen in der optimalen LP-Lösung (siehe Tab. 3) gehen aus Zeile 2 hervor.

In den Spalten y_1 bis y_8 sind entsprechend die Informationen für den nichtganzzahligen LP-Nebenbasisteil ausgewiesen. Es handelt sich hier um eine Wiederholung eines Teils von Tab. 9.

		x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
1	$K_{BZ}^N = \{\bar{g}_1,..,\bar{g}_{10}\}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		2	0	2	1	0	1	0	1	2	0	1	2	0	2	1
		0	4	2	2	5	1	5	2	4	4	0	0	2	2	4
2	$\bar{c}'^o$	40	30	100	40	70	50	80	29	58	31	60	33	56	25	97
3	$\bar{u}'$		u_2			u_3	u_5		u_6	u_{10}		u_4	u_8	u_1	u_9	u_7
4	x_{13}								$\frac{6}{14}$	$\frac{12}{14}$		$\frac{10}{14}$	$\frac{2}{14}$	1	$\frac{10}{14}$	$\frac{8}{14}$
	x_{14}								$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$		$\frac{4}{14}$	$\frac{5}{14}$	0	$\frac{11}{14}$	$\frac{13}{14}$

Tab. 10: Die Bestimmung des Gruppenminimierungsproblems über τ

Gemäß τ sind nun die kostengünstigsten Reste aus dem Nebenbasisteil zu bestimmen. Insgesamt lassen sich 10 unterschiedliche Reste, also Elemente der Faktorgruppe G_{BZ} erzeugen. Die kostenminimalen Elemente erhält man durch einen Vergleich der Koeffizienten aus Zeile 2. Das Element $[0,0,4]' \in G_{BZ}$ etwa läßt sich einmal direkt durch $1 \cdot x_7$ erzeugen, oder zum anderen durch die Linearkombination y_3, die $[x_{13}, x_{14}] = [4/14, 3/14]$ entspricht. Da x_7 günstiger ist, kann y_3 im asymptotischen Optimum niemals positiv werden.

Durch diese Bewertung entsprechend Vorschrift (23) erhalten wir alle u_i, die zugehörigen Spalten $\bar{g}_i$ und die Zielfunktionskoeffizienten des Gruppenminimierungsproblems c_i^o (jeweils i = 1,...,q = 10). Die $\bar{g}_i$ bilden den Komplex $K_{BZ}^N \subset G_{BZ}$, der durch die unterstrichenen Elemente aus Zeile 1 gebildet wird. Um die Transformation

$$\bar{x}_{NQ} \xrightarrow{\tau_{NQ}^v} \bar{y} \xrightarrow{\tau^v} \bar{u}_{NQ}$$

leichter verfolgen zu können, sind die mit dem nichtganzzahligen Nebenbasisteil korrespondierenden u_i in Zeile 4 durch ihre zugehörigen Variablenwerte für x_{13} und x_{14} erklärt. Die Numerierung der u_i ist willkürlich.

Schritt (V):

Aus den durch Unterstreichen gekennzeichneten Daten in Tab. 10 läßt sich jetzt das Gruppenminimierungsproblem (24) aufstellen.

Im weiteren wird GOMORY's dynamischer Programmansatz zur Optimierung angewandt, der unter GOMORY [1969, S. 465 ff., Anhang 2] ausführlich in allgemeiner Form dargestellt ist. Hier sei deshalb am Rechenschema Tab. 11 eine beispielsbezogene Erläuterung gegeben.

Der algorithmische Ablauf vollzieht sich in Tab. 11 Zeile für Zeile von Zeile 1 bis Zeile 10. Die Tabellenpositionen stellen aktuelle Kostenwerte (umgeklammerte Zahlen) und Indexnotierungen (Zahlen in eckigen Klammern) dar. Zum Abschluß der Rekursion mit der Ableitung von Zeile 10 lassen

sich die asymptotischen Optimalwerte der Nebenbasisvariablen x_6 bis x_{14} des GGLP-Beispiels ermitteln. Entsprechend bedeuten die Tabellenpositionen im 2. Teil von Tab. 11 (Zeile 11-19) optimale Lösungswerte der Nebenbasisvariablen. Der Rechenablauf im einzelnen ist unter (α) bis (ε) dargestellt.

(α) In Zeile 0 von Tab. 11 sind alle Gruppenelemente von G_{BZ} wiedergegeben. Entsprechend korrespondiert z.B. Spalte 9 des Rechenschemas mit dem Rest $[0,1,3]' \in G_{BZ}$.

In den Zeilen 1 bis 10 sind in der Spalte u_i jeweils die in den einzelnen Rekursionsstufen $j = 1,\ldots,10$ hinzukommenden Variablen u_i angeführt; in der Rekursionsstufe $j = 5$ wird z.B. die Gruppenvariable u_5, die mit dem Gruppenelement $\bar{g}_7$ korrespondiert (Spalte $\bar{g}_k$), in die weitere Optimierung einbezogen.

Der Gruppenoptimierungsalgorithmus basiert darauf, daß je Rekursionsstufe j zu den bisherigen Variablen u_i ($i = 1,\ldots,$ j-1) die Variable u_j hinzukommt und ausgehend von der Optimallösung des Problems im Hinblick auf die bisher eingeführten Variablen die Optimallösung des Gruppenoptimierungsproblems in bezug auf die Variablen u_i ($i = 1,\ldots,j$) gesucht wird.

Zu Beginn der Rekursionsstufe $j = 3$ wurde z.B. schon festgestellt, wie die optimale Restelimination der Basisvariablen ist, wenn man allein die Gruppenvariablen u_1 und u_2, korrespondierend mit den Resten $\bar{g}_2$ und $\bar{g}_4$, verwendet. In der 3. Rekursionstufe wird dann ermittelt, ob durch Aufnahme von u_3 mit dem Zielfunktionskoeffizienten $c_3^o = 70$

(Zeile 3, Spalte c_i^0) die Reste günstiger kombiniert werden können.

(ß) Die Reihenfolge, in der die u_i in die weitere Optimierung einbezogen werden, ist beliebig; aus Zweckmäßigkeitsgründen stimmen im Rechenschema die Indizes der u_i mit der aktuellen Nummer der Rekursionsstufe überein, in der sie in die Optimierung einbezogen werden.

Mit den Variablen u_1 und u_2 lassen sich nur die Reste $\bar{g}_2$ und $\bar{g}_4$ eliminieren (Zeile 2, Spalte 2 und 4). Dies ist gleichbedeutend damit, daß durch Verwendung von $\bar{g}_2$ und $\bar{g}_4$ als erzeugende Elemente nur die Untergruppe $\{\bar{g}_0, \bar{g}_2, \bar{g}_4\} \subset G_{BZ}$ kombiniert werden kann. Wenn in der 3. Rekursionsstufe $\bar{g}_5$ hinzukommt, ist entsprechend

$$\bar{g}_6 \oplus \{\bar{g}_0, \bar{g}_2, \bar{g}_4\} = \{\bar{g}_0, \bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3, \bar{g}_4, \bar{g}_5\} \subset G_{BZ}$$

erzeugbar (Zeile 3). Nur unter Verwendung der durch u_1 bis u_3 dargestellten Ausschnitte des Nebenbasisteils kann man also nicht alle möglichen Reste der Basisvariablen zum Verschwinden bringen. Durch weitere Aufnahme von u_4 in der 4. Stufe ist allerdings G_{BZ} durch $u_1, \ldots, u_4$ insgesamt darstellbar. In diesem Stadium der Rekursion kann man etwa den Rest $\bar{g}_{13}$ unter minimalen Kosten von 246 Einheiten erzeugen (Zeile 4, Spalte 13).

(γ) Die in eckigen Klammern angegebene Indexnotierung ermöglicht es, über Rückwärtsrechnen, wie in einer Vielzahl von dynamischen Programmierungsansätzen üblich, die zur Erzeugung des betreffenden Elementes verwandten Variablen zu ermitteln. Für den Rest $\bar{g}_{13}$ lautet dieses Rückwärtsrechnen in der 4. Rekursionstufe z.B. (Zeile 4):

Die aktuell zuletzt verwandte Variable ist u_4 (Index [4]), die mit Gruppenelement $\bar{g}_6$ korrespondiert. An vorletzter Stelle errechnet sich dann: $\bar{g}_{13} - \bar{g}_6 = \bar{g}_7$. $\bar{g}_7$ ist mit Kosten von $246 - c_4^o = 186$ erzeugbar. Für $\bar{g}_7$ wurde zuletzt wiederum die Variable u_4 verwandt: $\bar{g}_7 - \bar{g}_6 = \bar{g}_1$; die Kosten von $\bar{g}_1$ sind: $186 - c_4^o = 126$. Für $\bar{g}_1$ ist das letzte Element u_3, also $\bar{g}_5$: $\bar{g}_1 - \bar{g}_5 = \bar{g}_2$ mit Kosten: $126 - c_3^o = 56$. $\bar{g}_2$ schließlich wird durch die Variable u_1 des Gruppenminimierungsproblems dargestellt.

Das Ergebnis des gesamten Rückrechnungsganges ist, daß sich in der 4. Rekursionsstufe $\bar{g}_{13}$ kostenminimal erzeugen läßt entsprechend:

$u_4 = 2 \quad u_3 = 1 \quad u_1 = 1$	Variable
$2 \ \bar{g}_6 + 1 \ \bar{g}_5 + 1 \ \bar{g}_2 = \bar{g}_{13}$	Gruppenaddition
$2 \cdot 60 + 1 \cdot 70 + 1 \cdot 56 = 246$	Kostenermittlung

(s) Der Optimierungsvorgang in jeder Rekursionsstufe sei am Übergang von Stufe 4 zu Stufe 5 erläutert.

Durch systematische Gruppenaddition des neu hinzukommenden Elements - hier u_5 mit $\bar{g}_7$ und $c_5^o = 50$ - zu allen Elementen, die bisher im Rekursionsgang darstellbar sind, wird beginnend mit dem Nullelement geprüft, ob mit der Verwendung der neu hinzukommenden Variablen die Reste kostengünstiger kombinierbar sind als in der vorherigen Stufe ohne Verwendung der aktuell getesteten Variablen.

Im Rechenschema zeigt sich z.B., daß $\bar{g}_{11}$ in Stufe 4 durch $\bar{g}_5$ und $\bar{g}_6$ mit Kosten von 130 darstellbar ist. In Stufe 5 ist es

dagegen möglich, durch Hinzunahme von $\bar{g}_7$ diese Kosten auf 80 zu senken, wenn man zur Konstruktion des Restes $\bar{g}_{11}$ die Gruppenelemente $\bar{g}_4$ und $\bar{g}_7$ je einmal nimmt. Neben den verminderten Kosten muß man sich dann jeweils den Index des bei der Gruppenaddition zuletzt verwandten Elementes merken, hier also 5 für u_5 korrespondierend mit $\bar{g}_7$. Für $\bar{g}_{12}$ zeigt sich in der 5. Rekursionsstufe, daß durch u_5 keine Verbesserung möglich ist; entsprechend bleiben aktuelle Kosten und Indexnotierung unverändert (Spalte 12, Zeilen 4 und 5).

In dieser Weise wird verfahren, bis alle Variablen des Gruppenminimierungsproblems in die Optimierung einbezogen wurden, bzw. - was damit gleichbedeutend ist - alle Elemente des Komplexes K_{BZ}^{N} mit ihren zugeordneten Kosten für die Resterzeugung getestet wurden.

(e) Nach Abschluß der Gruppenoptimierung lassen sich durch Rückwärtsrechnen in der letzten Stufe die Optimalwerte $\underline{\bar{u}}$ der Vablen des Gruppenminimierungsproblems bestimmen, die zur Resterzeugung jedes der durch K_{BZ}^{N} darstellbaren Gruppenelemente aus C_{BZ} kostenminimal zu verwenden sind. Durch Anwendung von τ^{-1} (Informationen aus Tab. 10 und Tab. 9) lassen sich daraus die Optimalwerte $\underline{\bar{x}}_N$ der Nebenbasisvariablen identifizieren.

In Tab. 11 ergibt sich etwa, daß der Rest $\bar{g}_{14}$ mit den Gruppenvariablen $\underline{u}_2 = 1$ und $\underline{u}_6 = 2$ mit minimalen Kosten von $1 \cdot 30 + 2 \cdot 29 = 88$ erzeugbar ist. Über Tab. 10 läßt sich aus der Korrespondenz $u_2 \rightarrow x_7$ der Optimalwert $\underline{x}_7 = 1$ der ganzzahligen Nebenbasisvariablen x_7 ermitteln. Durch die Abbildung $u_6 \rightarrow [6/14\ x_{13},\ 1/14\ x_{14}]$ bestimmen sich die zugehörigen Optimalwerte des nichtganzzahligen Nebenbasisteils als $\underline{x}_{13} = 12/14$ und $\underline{x}_{14} = 2/14$.

Tab. 11: Rechenschema zur Gruppenoptimierung und asymptotische Lösung für $\bar{x}_N$

	Gruppenelemente →																		
0	$i = 1,\ldots,10$		ϑ_{BZ}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
				0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
				0	1	2	3	4	5	0	1	2	1	4	5	0	1	2	3	4	5
0	u_i	$\bar{g}_k$	c_i^0																		
1	u_1	$\bar{g}_2$	56	0		56		112													
						[1]		[1]													
2	u_2	$\bar{g}_4$	30	0		56		30													
						[1]		[2]													
3	u_3	$\bar{g}_5$	70	0	126	56	100	30	70												
					[3]	[1]	[3]	[2]	[3]												
4	u_4	$\bar{g}_6$	60	0	126	56	100	30	70	60	186	116	160	90	130	120	246	176	220	150	190
					[3]	[1]	[3]	[2]	[3]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]
5	u_5	$\bar{g}_7$	50	0	126	56	100	30	70	60	50	116	106	90	80	120	110	100	166	150	140
					[3]	[1]	[3]	[2]	[3]	[4]	[5]	[4]	[5]	[4]	[5]	[4]	[5]	[5]	[5]	[4]	[5]
6	u_6	$\bar{g}_8$	29	0	126	56	100	30	70	59	50	29	106	85	80	114	109	88	79	58	135
					[3]	[1]	[3]	[2]	[3]	[6]	[5]	[6]	[5]	[6]	[5]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]
7	u_7	$\bar{g}_{10}$	97	0				...s.o....						85	[6]			...s.o....			
8	u_8	$\bar{g}_{12}$	33	0	126	56	100	30	70	59	50	29	106	85	80	33	109	88	79	58	103
					[3]	[1]	[3]	[2]	[3]	[6]	[5]	[6]	[5]	[6]	[5]	[8]	[6]	[6]	[6]	[6]	[8]
					83																
					[8]																
9	u_9	$\bar{g}_{14}$	95								...s.o....							88			
																		[6]			
10	u_{10}	$\bar{g}_{16}$	58								...s.o....										58
																					[6]
			Einh.																		
11		v	6	1/1																	
12		a	7	1/1				1	1	1					1			1			
13		r	8	1/1																	
14		i	9	1/1																	
15	a	x	10	1/1				1		1											1
16		b	11	1/1		1					1		1		1		1		1		
17		1	12	1/1																	
18		1	13	1/14		2	14			6		6	14	20		2	6	12	6	12	2
19		e	14	1/14		5				1		1		1		5	1	2	1	2	5

Diese Informationen sind für jeden der Reste des Problems im unteren Teil des Rechenschemas Tab. 11 wiedergegeben. Der Gruppenoptimierungsalgorithmus hat also im GGLP-Zahlenbeispiel für alle der möglichen Reste des Problems die asymptotische Lösung ermittelt, da über K^N_{BZ} die Gruppe G_{BZ} vollständig darstellbar ist.

Gegenüber der RGLP-Optimierung zeigt der Gruppenoptimierungsalgorithmus keinen Unterschied. Allein die Identifizierung der mit den Optimalwerten $\underline{u}_i$ der Gruppenvariablen korrespondierenden Optimalwerte $\underline{x}_j$ $(j \in J_N)$ der Nebenbasisvariablen macht für den nichtganzzahligen Nebenbasisteil kompliziertere Zuordnungsschritte notwendig.

Schritt (VI):

Der Gruppenoptimierungsalgorithmus ermittelt für alle möglichen Reste (in unserem Beispiel 18) die optimale asymptotische Lösung. Dies ist aus Tab. 11 ersichtlich.

Für unser GGLP-Beispiel hatten wir 8 unterschiedliche rechte Seiten vorgegeben. Diese sind in Tab. 7 enthalten. Dort wurden gleichfalls die Bilder der $\bar{b}_j$ in G_{BZ} bestimmt. Durch diese Identifikation der $\bar{b}_j$ mit einem der Gruppenelemente aus G_{BZ} können wir jetzt über Tab. 11 die Werte der Nebenbasisvariablen bestimmen, die notwendig sind, um die durch $B^{-1}\,\bar{b}_j$ für die ganzzahligen Basisvariablen gegebenen Reste zu eliminieren. Die entsprechenden Rechenvorgänge sind in Tab. 12 enthalten.

Die Zeileneinteilung von 1 bis 8 entspricht den acht unterschiedlichen $\bar{b}_j$ aus Tab. 7. Spalte 2 gibt die optimale LP-Lösung des GGLP-Problems wieder; die Basisvariable ergibt sich ja nach $\bar{x}_B = B^{-1} \bar{b}_j$. Der zugeordnete Zielfunktionswert geht aus Spalte 6 hervor.

Spalte 5 enthält die durch Gruppenoptimierung ermittelten Werte der Nebenbasisvariablen $\bar{x}_{\bar{N}}$. $\bar{b}_4$ etwa korrespondiert mit dem Gruppenelement $\bar{g}_{17}$ wie man aus Tab. 7 und Tab. 11 ersieht; entsprechend ergibt sich aus Tab. 11 die optimale asymptotische Lösung des Nebenbasisteils

$$x_{10} = 1,\ x_{13} = 1/7 \text{ und } x_{14} = 5/14.$$

Aus $\bar{x}_{\bar{N}}$ läßt sich das Korrekturglied $N\,\bar{x}_{\bar{N}}$ bestimmen, das die Reste der ganzzahligen LP-Basisvariablen eliminiert. Da wir von der optimalen LP-Lösung für den Basisteil ausgehen, wurden die Koeffizienten des Korrekturgliedes auf das optimale LP-Tableau bezogen. Dieser Koeffizientenvektor ist in Spalte 3 von Tab. 12 ausgewiesen.

Das Korrekturglied für $\bar{b}_7$ ergibt sich z.B. nach:

$$\begin{bmatrix} -\ 0,\ 333 \\ +\ 0,\ 666 \\ -\ 0,\ 666 \\ -\ 0,\ 946 \\ +\ 0,\ 542 \end{bmatrix} := -20/14 \begin{bmatrix} -\ 0,\ 333 \\ 0 \\ 0,\ 333 \\ 0,\ 583 \\ -\ 0,\ 416 \end{bmatrix} - 1/14 \begin{bmatrix} 11,\ 333 \\ -\ 9,\ 333 \\ 2,\ 666 \\ 1,\ 583 \\ 0,\ 750 \end{bmatrix}$$

1	2	3	4	5	6	7
$\bar{b}$	$B^{-1}.\bar{b}$	$-B^{-1}N\bar{x}_N$	$\bar{x}_B$	$\bar{x}_N$	LP-ZIEFU	GGLP-ZIEFU
1	15,833 41,500 45,166 159,042 40,292	-0,833 -0,500 +0,833 -6,774 -2,417	15 41 46 152,268 37,875	$x_{11}=1$ $x_{13}=2/14$ $x_{14}=5/14$	178.470	178.387
2	17,166 40,166 45,833 156,375 39,292	-3,166 +2,833 -0,833 -1.107 -0,417	14 43 45 155,268 37,875	$x_{10}=1$ $x_{13}=2/14$ $x_{14}=5/14$	178.550	178.447
3	21,500 36,833 47,500 149,958 35,542	+3,500 -3,833 +1,500 -6,708 -1,792	25 33 49 143,250 33,750	$x_{11}=1$ $x_{13}=14/14$	178.490	178.384
4	22,166 36,166 47,833 148,625 35,042	-3,166 +2,833 -0,833 -1,107 -0,417	19 39 47 147,518 34,625	$x_{10}=1$ $x_{13}=2/14$ $x_{14}=5/14$	178.530	178.427
5	15,833 41,833 45,166 158,375 39,458	+3,166 -3,833 +1,833 -6,125 -2,208	19 38 47 152,25 37,250	$x_{11}=1$	178.650	178.600
6	13,833 42,166 45,166 158,208 40,125	-5,833 -0,166 +1,833 -8,405 -6,500	8 41 47 149,803 33,625	$x_7=1$ $x_{11}=1$ $x_{13}=6/14$ $x_{14}=1/14$	178.830	178.721
7	22,333 36,333 47,666 149,500 35,333	-0,333 +0,666 -0,666 -0,946 +0,542	22 37 47 148,554 35,875	$x_{13}=20/14$ $x_{14}=1/14$	178.420	178.335
8	10 44 45 156,75 39,25				179.620	179.620

Tab. 12: GGLP-Optima für acht rechte Seiten $\bar{b}_j$ des GGLP-Beispiels

Die letzten beiden Spalten dieses Ausdrucks sind die aktuellen Koeffizientenspalten des optimalen LP-Tableaus zu unserem GGLP-Problem für die nichtganzzahligen Nebenbasisvariablen x_{13} und x_{14}; dies läßt sich an Tab. 3 nachprüfen.

Die Korrektur der LP-Basislösung $\bar{x}_B = B^{-1}\bar{b}_j$ hat zu erfolgen gemäß:

$$(73)\quad \underline{\bar{x}}_B = B^{-1}\,(\bar{b}_j - N\ \underline{\bar{x}}_N)$$

$$= B^{-1}\ \bar{b}_j - B^{-1}\ N\ \underline{\bar{x}}_N$$

Die Summe der Spalten 2 und 3 aus Tab. 12 ergibt somit die asymptotischen GGLP-Optimalwerte für die LP-Basisvariablen des Problems. Dies ist in Spalte 4 errechnet. Die zugehörigen Zielfunktionsgrößen gehen aus Spalte 7 hervor.

Die GGLP-Zielfunktionswerte kann man zweifach bestimmen. Am Beispiel $\bar{b}_6$ ergibt sich etwa:

$$(\alpha)\quad ZIEFU_{GGLP} = ZIEFU_{LP} - \text{Korrektur}$$

$$= \bar{c}'_B\ B^{-1}\ \bar{b}_j - \bar{c}'^{*}\ \underline{\bar{x}}_N$$

$$= 178470 + 1\cdot(-30) + 1\cdot(-50) + 6/14\cdot(-56) + 1/14\cdot(-70)$$

$$(\beta)\quad ZIEFU_{GGLP} = \bar{c}'\ \underline{\bar{x}}$$

$$= 8\cdot 290 + 41\cdot 1390 + 47\cdot 2550 + 148{,}554\cdot(-100) + 35{,}875\cdot 420 + 1\cdot(-970) + 1/14\cdot(-2800).$$

Bei (α) greift man auf die Zielfunktionskoeffizienten des optimalen LP-Tableaus zurück (siehe Tab. 3), während (β) von den ursprünglichen Zielfunktionskoeffizienten der Variablen ausgeht (siehe Tab. 2).

Wie oben schon nachgewiesen und auch näher diskutiert wurde (232-j), zeigt sich hier am Zahlenbeispiel, daß $\bar{b}_8$ schon in der optimalen LP-Lösung zum GGLP-Optimum führt.

322. Sensitivitätsanalyse für die rechte Seite $\bar{b}$ des gemischt-ganzzahligen linearen Programmierungsproblems

(a) Aufgabenstellung

Da der zur Gruppenoptimierung verwandte dynamische Programmansatz das Merkmal hat, für alle möglichen Reste der LP-Basisvariablen des GGLP-Problems die kostengünstigste Elimination durch den Nebenbasisteil aufzuzeigen, lassen sich diese Informationen direkt zu einer Sensitivitätsanalyse der Lösung in bezug auf Änderungen von $\bar{b}$ verwenden, oder mit anderen Worten, zur parametrischen GGLP-Optimierung bei Variation der rechten Seite des Problems.

Auch diese Sensitivitätsanalyse ist asymptotisch insofern, als die hier im weiteren angewandten Verfahren die Zulässigkeit oder Nichtzulässigkeit des Basisteils der Variablen unberücksichtigt lassen, da sie allein auf die Ganzzahligkeitsstruktur einer GGLP-Aufgabe abstellen. Wie in den Ausführungen unter (321-i,j) gezeigt wurde, ist allerdings ein hinreichendes Kriterium anwendbar, das anzeigt, ob die bei der Sensitivitätsanalyse auftretenden rechten Seiten $\bar{b}$ auf jeden Fall zu zulässigen GGLP-Lösungen führen müssen oder aber unzulässige Lösungen ergeben können. Auf diesen Problemkreis werden wir hier nicht mehr eingehen.

Die Sensitivitätsanalyse wird in einer Marginalbetrachtung durchgeführt. Damit wird untersucht, welche optimalen Lösungs- und Zielfunktionswerte resultieren, wenn die Komponenten b_i von $\bar{b}$ jeweils nur um Eins erhöht oder vermindert werden. Aus dieser Marginalanlyse läßt sich direkt ableiten, wie diese Änderungen für beliebige alternative $\bar{b}$ zu ermitteln sind.

Dabei werden einige Betrachtungen eingefügt, die allein den Zweck verfolgen, Ansatzpunkte für ökonomische Interpretationen aufzuzeigen. Eine geschlossene Analyse der aus der Gruppenoptimierung und Polyederuntersuchung (im anschließenden Kap. 33) resultierenden Möglichkeiten für Schattenpreisbetrachtungen würde im Rahmen dieser Arbeit zu weit führen. Der Grund dafür ist, daß zwar verschiedenartige Ansätze für Schattenpreisuntersuchungen in der Theorie der ganzzahligen linearen Optimierung vorhanden sind, diese aber alle gegenüber dem leistungsfähigen Instrumentarium, das für ökonomische LP-Interpretationen aus der LP-Dualitätstheorie bisher erarbeitet wurde, erhebliche Mängel aufweisen.

Um nur einen konkreten Hinweis zu geben, sei auf zwei bekannte Untersuchungen verwiesen. Das offene Problem des GOMORY-BAUMOL-Konzepts der "Zurückrechnung" von Preisen [1960], auch in verbesserten Versionen, etwa denen von ALCALY-KLEVORICK [1966] und UEBE [1969], liegt darin, daß der Begriff des freien ökonomischen Gutes bei ganzzahliger Optimierung unklar wird. So können z.B. bei ganzzahliger Programmierung Nebenbedingungen in Ungleichungsform vorhanden sein, die für keine zulässige Lösung streng erfüllbar sind und dennoch den Lösungsraum beschränken. Umgekehrt kann bei einer Lockerung bindender und damit mit positiven Preisen bewerteter Restriktionen der Fall eintreten, daß die GLP-Lösung unverändert bleibt, obwohl keine Degeneration im LP-Sinn vorliegt. Eines dieser Probleme zeigt sich später auch beim Zahlenbeispiel in Abschnitt (f).

Der wesentliche Mangel von Ansätzen, die auf einer fundierten Dualitätstheorie für GLP-Optimierung aufbauen - eine gewisse Zusammenfassung derartiger Untersuchungen findet sich bei BALAS [1968-1] -, ist darin zu suchen, daß trotz einer auf Sat-

telpunktüberlegungen basierenden Axiomatik, die der des KUHN-TUCKER-Theorems und damit der des Preistheorems der linearen Programmierung ähnelt, sich ökonomisch nicht sinnvolle Interpretationen ergeben. So ermittelt man im Rahmen dieser Theorie zwar "Preise", die viele Eigenschaften der LP-Schattenpreise besitzen, deren Beziehung zu den im betrachteten Ausgangsproblem vorgegebenen ökonomischen Größen jedoch nur schwer interpretierbar ist.

Neben diesen Preisuntersuchungen finden sich vereinzelt auch parametrische Ansätze für die ganzzahlige Programmierung. Kriterien für die parametrische Abwandlung von $\bar{b}$ und die daraus resultierende Lösungsreaktion für den RGLP-Fall wurden z.B. von FRANK [1967] erarbeitet. Diese Untersuchung basiert zwar nicht auf der Gruppenoptimierung, wie die hier durchgeführte, wendet aber gleichfalls gruppentheoretische Überlegungen an. Neben dieser algorithmisch orientierten Analyse sei noch die rein theoretische Arbeit von NOLTEMEYER [1970] genannt.

(b) Interpretation der Zielfunktionskorrektur vom optimalen LP- zum optimalen GGLP-Wert

Zunächst werden in etwas abgewandelter Form kurz noch einmal die Beziehungen zwischen dem optimalen LP- und dem optimalen GGLP-Zielfunktionswert eines GGLP-Problems herausgestellt, da diese im weiteren eine wichtige Rolle spielen.

Der optimale GGLP-Zielfunktionswert läßt sich darstellen als:

$$(1)\quad ZIEFU_{GGLP} = ZIEFU_{LP} - \underline{\underline{d}}$$
$$= \bar{c}_B' \; B^{-1} \; \bar{b} - \bar{c}_N'^{*} \; \bar{\underline{x}}_N$$

wobei $\bar{\underline{x}}_N$ den Lösungswert des Nebenbasisteils im asymptotischen Optimum bezeichnet und $\underline{\underline{d}}$ die dadurch produzierte Zielfunktionskorrektur.

$\underline{\underline{d}}$ läßt sich aus den LP-optimalen Schattenpreisen der GGLP-Nebenbedingungen herleiten.

Da wir aus:

$$(2)\quad \underline{\underline{d}} = \bar{c}_N'^{*} \quad \bar{\underline{x}}_N = \sum_{j \in J_N} c_j^{*} \; \underline{\underline{x}}_j$$

c_j^{*} in bekannter Weise durch die optimalen LP-Schattenpreise y_i $(i = 1,\ldots,m)$ der Nebenbedingungen des GGLP-Problems ausdrücken können:

$$(3)\quad \underline{\underline{d}} = \sum_{j \in J_N} \left(\sum_{i=1} a_{ij} \; y_i - c_j \right) \underline{\underline{x}}_j ,$$

ist das Korrekturglied $\underline{\underline{d}}$ wie folgt interpretierbar. Es sei dabei nur die einzelne Variable x_j $(j \in J_N)$ betrachtet. Die gesamte Korrektur ergibt sich aus einer Summierung der einzelnen Effekte:

(α) $\underline{x_j}$ ist keine Schlupfvariable:

Wenn x_j keine Schlupfvariable ist, setzt sich die durch $\underline{\underline{x}}_j$ bewirkte Zielfunktionskorrektur zusammen

- aus der bewerteten Ent- oder Belastung der Nebenbedingungen durch $\sum_i a_{ij} \; y_i$.

- und aus der durch die Variable über c_j hervorgerufenen Veränderung der Zielfunktion.

Die durch die Ganzzahligkeitskomponente über $\underset{=}{x}_j$ verursachte Ent- und Belastung der Nebenbedingungen wiederum führt im einzelnen zu einer Bewertung von Null für nicht streng erfüllte und - abgesehen von Degeneration - zu einer Bewertung verschieden Null für streng erfüllte Restriktion.

Insgesamt kann die Zielfunktionsveränderung, die durch $\underset{=}{x}_j$ bedingt ist, natürlich keine Verbesserung sein, da $c^*_j \geq 0$.

(ß) x_j ist Schlupfvariable:

Sofern x_j Schlupfvariable ist, wird eine Zielfunktionskorrektur daraus notwendig, daß im Zuge der Verschärfung der entsprechenden schon bindenden Restriktion, x_j ist ja Nebenbasisvariable und wird auf den positiven Wert $\underset{=}{x}_j$ gesetzt, durch die optimale Anpassung der anderen Variablen bewertete Ent- und Belastungen bei den übrigen Nebenbedingungen stattfinden.

Wenn eine Zielfunktionsveränderung stattfindet, kann sie - wie unter (γ) - nur in Richtung einer Verschlechterung sein.

Fall (ß) ist anschaulich an dem oben unter (321-b) definierten Polyeder $P_{\bar{x}_E}(B,N,\bar{b})$ erklärbar. Er besagt in dieser Interpretation, daß der GGLP-Zulässigkeitsbereich dadurch aus dem LP-Zulässigkeitsbereich gewonnen wird, daß eine Restriktion parallel verschoben und zu einer Außenfläche von $P_{\bar{x}_E}$ wird. An zweidimensionalen Darstellungen läßt sich dieser Sachverhalt, wenn man eine nichtganzzahlige (x_1) und eine ganzzahlige (x_2) eigentliche Variable zugrundelegt, nur bei spezieller Steigungskonstellation der Nebenbedingungen wiedergeben, wie Abb. 7 zeigt.

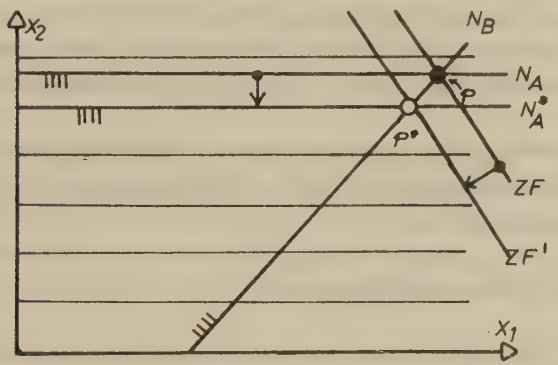


Abb. 7: Interpretation positiver Nebenbasisvariabler im asymptotischen GGLP-Optimum

Das LP-Optimum liegt hier im Punkt p, in dem die einzigen Nebenbedingungen N_A und N_B streng erfüllt sind. Die asymptotische Lösung erfordert, daß die Schlupfvariable von N_A positiv zu setzen ist, mithin die Nebenbedingungsgerade auf die Position N_A^* verschoben wird und das GGLP-Optimum in den Punkt p* fällt.

Diese Interpretationen der Zielfunktionskorrektur können im weiteren jeweils angewandt werden; explizit wird das jedoch im einzelnen nicht mehr durchgeführt.

(c) Lösungsreaktion bei marginalen Änderungen von $\bar{b}$

Wir werden jetzt die Lösungsreaktion eines GGLP-Problems bei marginalen Änderungen von $\bar{b}$ untersuchen. Dazu ist zunächst zu prüfen, welche Restklassenveränderung für die optimale LP-Basislösung eines GGLP-Problems eintritt. Da wir nur ganzzahlige $\bar{b}$ betrachten, bedeutet "marginal" hier, daß eine oder mehrere Komponenten b_i von $\bar{b}$ jeweils um eine positive oder negative Einheit verändert werden.

Die Restklassenzugehörigkeit einer durch $\bar{b}$ erzeugten Basislösung können wir durch den Homomorphismus $\nu_S P_1$ identifizieren:

$$(4)\quad \bar{b} \xrightarrow{P_1} \underline{b}_1 \xrightarrow{\nu_S} \bar{g}_o .$$

$\underline{\bar{b}}$ sei ein Vektor, der aus $\bar{b}$ durch die Vergrößerung der i-ten Komponente um Eins hervorgegangen ist. Wenn man mit $\bar{e}_i$ den i-ten Einheitsvektor der Länge m bezeichnet, gilt also:

$$(5)\quad \underline{\bar{b}} = \bar{b} + \bar{e}_i$$

Da alle Vektoren aus (5) und P_1 ganzzahlig sind, läßt sich das $\underline{\bar{b}}$ zugeordnete Gruppenelement $\nu_S P_1 \underline{\bar{b}} \in G_{BZ}$ wie folgt durch $\bar{g}_o$ ausdrücken:

$$(6)\quad \nu_S P_1 \underline{\bar{b}} = \nu_S P_1(\bar{b} + \bar{e}_i) = \nu_S P_1 \bar{b} + \nu_S P_1 \bar{e}_i$$

$$= \bar{g}_o + \nu_S \bar{p}_i$$

Hierbei ist mit $\bar{p}_i$ die i-te Spalte aus P_1 bezeichnet; für (6) ist Addition mod $\bar{S}_{Z1}$ definiert.

Die Restklassenänderung, die durch Vergrößerung der i-ten Komponente von $\bar{b}$ eintritt, läßt sich also in G_{BZ} dadurch erfassen, daß man zum Bild $\bar{g}_o$ von $\bar{b}$ das Bild $\nu_S \bar{p}_i$ der i-ten Spalte von P_1 mod $\bar{S}_{Z1}$ hinzuaddiert. Bei einer Abwandlung der i-ten Komponente von $\bar{b}$ um eine Einheit nach unten ist entsprechend $\nu_S \bar{p}_i$ von $\bar{g}_o$ zu subtrahieren.

Der zur Korrektur der neuen Basislösung $\underline{\bar{x}}_B = B^{-1} \underline{\bar{b}}$ erforderliche nichtnegative Wert der Nebenbasisvariablen $\underline{\bar{x}}_N$ läßt sich direkt aus den Ergebnissen der Gruppenoptimierung entnehmen. Die neue Basislösung selbst ergibt sich, entsprechend den Ableitungen oben, aus der alten Lösung für $\bar{b}$ nach:

$$(7)\quad \underline{\bar{x}}_B = B^{-1} \underline{\bar{b}} = B^{-1}(\bar{b} + \bar{e}_i) = B^{-1} \bar{b} + \bar{a}_i^*$$

$$= \bar{x}_B + \bar{a}_i^*$$

Hierbei ist $\bar{a}_i^*$ die i-te Spalte aus B^{-1}.

Während $\bar{a}_i^*$ die Änderung der LP-Basisvariablen wiedergibt, informiert $\nu_S \bar{p}_i$ - korrespondierend dazu - nur über die Änderung der Ganzzahligkeitsstruktur von $\underline{\bar{x}}_B$ gegenüber $\bar{x}_B$.

Zur Darstellung der Beziehungen zwischen den optimalen GGLP-Zielfunktionswerten der beiden Probleme, also mit $\bar{b}$ bzw. $\underline{\bar{b}}$ als rechter Seite, ist es zweckmäßig, von der Form (1) auszugehen. Zur Unterscheidung sind dabei im weiteren die $\underline{\bar{b}}$ zugeordneten Terme gegenüber den entsprechenden von $\bar{b}$ unterstrichen.

Die Differenz zwischen den GGLP-Zielfunktionswerten beider Probleme läßt sich schreiben als:

$$(8)\quad \text{DELTA-ZF} = (\underline{\text{ZIEFU}}_{LP} - \underline{d}) - (\text{ZIEFU}_{LP} - d)$$

$$= (\underline{\text{ZIEFU}}_{LP} - \text{ZIEFU}_{LP}) - (\underline{d} - d)$$

Man kann sich die Differenz DELTA-ZF somit erklären aus einer Differenz der $\bar{b}$ bzw. $\underline{\bar{b}}$ zugehörigen optimalen LP-Zielfunktionswerte vermindert um eine Differenz, die daraus resultiert, daß die Restelimination von $\underline{\bar{b}}$ gegenüber $\bar{b}$ kostengünstiger bzw. -ungünstiger ist.

Die Differenz der LP-Zielfunktionswerte läßt sich ermitteln nach:

$$(9)\quad \underline{\text{ZIEFU}}_{LP} - \text{ZIEFU}_{LP} = \bar{c}_B' \; B^{-1} \; \underline{\bar{b}} - \bar{c}_B' \; B^{-1} \; \bar{b}$$

$$= \bar{c}_B' \; B^{-1} \; (\underline{\bar{b}} - \bar{b})$$

$$= \bar{c}_B' \; B^{-1} \; \bar{e}_i$$

$$= \bar{c}_B' \; \bar{a}_i^*$$

Da sich der Ausdruck für die Korrekturglieder ($\underline{d} - d$) nicht mehr weiter vereinfachen läßt, lautet (8) nach Einsetzen:

$$(10)\quad \text{DELTA-ZF} = \bar{c}_B' \; \bar{a}_i^* - \bar{c}_N^{*\prime} \; (\bar{\underline{x}}_N - \bar{x}_N)$$

Die für die Marginalanalyse notwendigen Informationen für die asymptotischen Anpassung einer für $\bar{b}$ ermittelten GGLP-Lösung an eine GGLP-Lösung für die rechte Seite $\underline{\bar{b}}$, die sich um eine Einheit in einer Komponente von $\bar{b}$ unterscheidet, lauten zusammengefaßt:

- Die Resteigenschaften für das neue $\underline{\bar{b}}$ lassen sich aus $\bar{b}$ über (6) gewinnen. Damit ist gleichzeitig aus dem Gruppenoptimum die $\nu_S \; P_1 \; \underline{\bar{b}}$ zugehörige asymptotische Lösung für den Nebenbasisteil $\underline{\bar{x}}_N$ ermittelbar.
- Die Werte der Basisvariablen sind nach (7) anzupassen.
- Die GGLP-Zielfunktionsveränderung errechnet sich aus (10).

Die für DELTA-ZF errechneten Werte lassen sich für ökonomische Entscheidungen verwenden. Man kann auf ihrer Grundlage z.B. ermitteln, für welche Ressourcenart eine Erhöhung bzw. Verminderung des Ausgangsniveaus günstig ist. Dies ist durch einen Vergleich der absoluten Zielfunktionsänderung, die auf die Veränderung eines b_i zurückgeht, mit den Mehr- oder Minderausgaben möglich, die durch die Vergrößerung bzw. Verminderung des Faktoreneinsatzes der zugehörigen Faktorart verursacht werden. Am Zahlenbeispiel (Tab. 13) lassen sich die hier gegebenen Möglichkeiten anschaulich nachvollziehen.

(d) Größe der Zielfunktionskorrektur in der Marginalbetrachtung

Aus den Ableitungen im letzten Abschnitt lassen sich einige Folgerungen über die Größe der zu erwartenden Zielfunktionskorrektur bei marginalen Änderungen von $\bar{b}$ ziehen.

Ein wichtiges Ergebnis, das im Gegensatz zu den entsprechenden Aussagen der nichtlinearen oder linearen Programmierung steht, ist im folgenden Satz zusammengefaßt:

(11) Satz: GGLP-Zielfunktionsreaktion bei marginalen Änderungen von $\bar{b}$

b_i sei die i-te Komponente der rechten Seite $\bar{b}$ eines GGLP-Problems.

Die Absolutwerte der Änderungen des optimalen GGLP-Zielfunktionswertes sind unterschiedlich, je nachdem, ob b_i auf b_i+1 oder auf b_i-1 marginal abgewandelt wird:

$$|\text{DELTA-ZF}_{b_i+1}| \neq |\text{DELTA-ZF}_{b_i-1}|.$$

Gleichheit ist als Spezialfall anzusehen.

Beweis: Nach (8) ist die Zielfunktionsänderung in eine Abwandlung des optimalen LP-Zielfunktionswertes und eine aus der Ganzzahligkeitskorrektur resultierende Veränderung zerlegbar:

$$\text{DELTA-ZF} = (\underline{\text{ZIEFU}}_{LP} - \text{ZIEFU}_{LP}) - (\underline{d} - d)$$

Während die ersten beiden und der vierte Ausdruck der rechten Seite dieser Beziehung unabhängig davon sind, ab b_i auf b_i+1 oder b_i-1 abgewandelt wird, da wir nur die Absolutwerte betrachten, ist diese Gleichheit bei $\underline{d}$ nicht mehr gegeben.

$\underline{d}$ ergibt sich aus der asymptotischen Lösung, wie aus (6) hervorgeht, einmal für das Gruppenelement $\bar{g}_o + \nu_S \bar{p}_i$ und zum anderen für $\bar{g}_o - \nu_S \bar{p}_i$. Da allgemein jedoch $\bar{g}_o + \nu_S \bar{p}_i \neq \bar{g}_o - \nu_S \bar{p}_i$ sein wird und nur in Spezialfällen Gleichheit eintreten kann, werden im allgemeinen auch unterschiedliche asymptotische Lösungen mit unterschiedlichen Korrekturen notwendig.

*****

Es scheint, als ob die Allgemeinheit dieses Satzes dadurch eingeschränkt würde, daß er nur in asymptotischer Sicht Gültigkeit hat. Das ist jedoch keineswegs der Fall. In diesem Zusammenhang ist die asymptotische Betrachtungsweise vollkommen der Einschränkung gleichwertig, die bei LP-Schattenpreisuntersuchungen die Aussagefähigkeit der aus Dualvariablen hergeleiteten Schattenpreise auf den Bereich begrenzt, in dem die optimale LP-Basislösung zulässig bleibt.

(e) Lösungsreaktion bei allgemeinen Veränderungen von $\bar{b}$

Bei Änderungen von $\bar{b}$, die nicht mehr marginal in dem oben definierten Sinn sind, sondern eine gleichzeitige Abwandlung mehrerer Komponenten von $\bar{b}$ um mehr als eine Einheit zulassen, läßt sich die Lösungsreaktion in entsprechender

Weise ermitteln. Für die Interpretation kann man sich diese Änderung aus einer Vielzahl marginaler Änderungen im o.a. Sinn zusammengesetzt denken, für die Berechnung kann man nicht auf die bei marginalen Änderungen möglichen Vereinfachungen in (6), (7) und (10) zurückgreifen, sondern muß auf die Grundbeziehungen zurückgehen.

Die für diese parametrischen Abwandlungen notwendigen Rechenoperationen bestehen im wesentlichen aus Matrizen- und Vektormultiplikationen, jedoch nicht, und das ist die besondere Eigenart des Gruppenminimierungsansatzes, aus einer Optimierungsprozedur. Die Optimierung wurde einmal vorgenommen, einmal für die LP-Optimierung und einmal für die Gruppenoptimierung. Durch den Gruppenansatz wurde der periodische Charakter der Ganzzahligkeitsreste numerisch ermittelt und damit sind für die gegebene LP-Basis alle Lösungen direkt ableitbar, für welche die ermittelten Basisvariablen zulässige Werte annehmen.

Eine für die LP-Theorie triviale und auch für GGLP-Probleme leicht einzusehende Aussage sei an dieser Stelle erläutert.

Gemeint ist, daß bei der Änderung einer Komponente b_i von $\bar{b}$, die auf eine Lockerung der zugehörigen Nebenbedingung hinausläuft, der GGLP-Zielfunktionswert niemals schlechter werden kann. Diese Lockerung einer Restriktion heißt bei Bedingungen der Art $b_i \geq \sum a_{ij} x_j$ eine Vergrößerung von b_i und bei $b_k \leq \sum a_{kj} x_j$ eine Verkleinerung von b_k.

Wenn eine Nebenbedingung in dieser Weise um d_b Einheiten gelockert wird, kann man in dem neuen System die ursprüngliche GGLP-Lösung dadurch erhalten, daß man die Schlupfvariable der Restriktion um d_b Einheiten vergrößert. Der GGLP-Zielfunktionswert muß dadurch unverändert bleiben, und weiterhin muß auch die Ganzzahligkeitskongruenz im neuen System

wieder erfüllt sein; alle Variablen haben in beiden Systemen die gleichen Werte bis auf die um d_b veränderte Schlupfvariable.

Eine Lösung mit gleichem Zielfunktionswert, wie der ursprüngliche GGLP-Zielfunktionswert, ist also auf jeden Fall ableitbar. Ob sich durch die Lockerung der Restriktion zusätzlich der Zielfunktionswert verbessern läßt, hängt davon ab, ob die Restriktion streng erfüllt war oder nicht. Während im letzteren Fall keine Verbesserung stattfinden kann, ist sie im ersteren möglich.

(f) Zahlenbeispiel

In Tab. 13 sollen die GGLP-Zielfunktionsreaktionen am Zahlenbeispiel aufgezeigt werden.

Marginaländerungen werden für alle Komponenten von $\bar{b}_1$ (Zeile 1 bis 10) und $\bar{b}_3$ (Zeile 11 bis 20) durchgeführt. Die Bilder dieser beiden Vektoren in G_{BZ} werden aus Tab. 7 ersichtlich. Zur Vereinfachung wurde für die eindeutige Kennzeichnung aller Gruppenelemente von G_{BZ}, die in Tab. 13 auftreten, die Numerierung der Elemente in Tab. 11 zugrundegelegt. Deshalb entsprechen:

$$\nu_S \, P_1 \, \bar{b}_1 = \bar{g}_1 \text{ und } \nu_S \, P_1 \, \bar{b}_3 = \bar{g}_9$$

wie aus Spalte 2 hervorgeht.

In den Spalten 4 und 5 wird die Ableitung des Bildes der abgewandelten rechten Seite aus dem Bild der ursprünglichen rechten Seite über das Bild der entsprechenden Spalte aus P_1 gemäß (6) durchgeführt.

Eine Verminderung der 4. Komponente von $\bar{b}_1$ bedeutet z.B. die Subtraktion des Bildes der 4. Spalte von P_1 von $\bar{g}_1$. Die 4. Spalte $\bar{p}_4$ von P_1 lautet im Zahlenbeispiel:

$$\bar{p}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix} \quad ;$$

dies ist aus der Matrix P in Tab. 5 ersichtlich. Daraus ergibt sich:

$$\nu_S \bar{p}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \bar{g}_{17} \text{ und } -\nu_S \bar{p}_4 = -\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \bar{g}_7.$$

Für die Differenz folgt dann:

$$\nu_S P_1 \bar{b}_1 - \nu_S \bar{p}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \bar{g}_1 + \bar{g}_7 = \bar{g}_8$$

Das Ergebnis dieser Rechenoperationen ist in Zeile 8, Spalte 4 und 5, ausgewiesen. Entsprechend lassen sich die anderen Eintragungen in den Spalten 4 und 5 herleiten.

Aus Spalte 6 wird deutlich, daß die absolute Höhe der Veränderung des LP-Zielfunktionswertes unabhängig von einer marginalen Vergrößerung oder Verkleinerung der Komponenten von $\bar{b}$ ist. Da für diese Betrachtungen ja immer die gleiche Basis zugrundegelegt ist, ist die Veränderung des LP-Zielfunktionswertes unabhängig von $\bar{b}_j$. Entsprechend korrespondieren die Werte Zeilen 1, 2 und Zeilen 11, 12, usw. In Spalte 7 ist die Entlastung angegeben, welche die Zielfunktion für die ursprüngliche rechte Seite erfährt, wenn die Ganzzahligkeits-

korrektur wegfällt [siehe (8)]. Diese Größe ist nur vom ursprünglichen $\bar{b}$ abhängig. So führt die bei $\bar{b}_1$ durchzuführende Ganzzahligkeitskorrektur zu einer Verschlechterung des zu maximierenden optimalen LP-Zielfunktionswertes um 83 (siehe Tab. 11, Spalte 1, Zeile 8), bei $\bar{b}_3$ entsprechend um 106.

	1	2	3		4	5	6	7	8	9
	$\bar{b}$	$\bar{g}_o$	Veränderte Komponente b_i		$\nu_S \bar{p}_i$	$\bar{g}_o + \nu_S \bar{p}_i$	Veränd. Ziefu-LP	+d	-d	DELTA-Z
1			b_1	+1	$\bar{g}_{14}$	$\bar{g}_{15}$	+100	+83	-79	+104
2				-1	$\bar{g}_{10}$	$\bar{g}_{11}$	-100	+83	-80	-79
3			b_2	+1	$\bar{g}_8$	$\bar{g}_9$	+40	+83	-106	+17
4				-1	$\bar{g}_{16}$	$\bar{g}_{17}$	-40	+83	-103	-60
5	$\bar{b}_1$	$\bar{g}_1$	b_3	+1	$\bar{g}_1$	$\bar{g}_2$	-70	+83	-56	-43
6				-1	$\bar{g}_5$	$\bar{g}_0$	+70	+83	0	+153
7			b_4	+1	$\bar{g}_{17}$	$\bar{g}_{12}$	-50	+83	-33	0
8				-1	$\bar{g}_7$	$\bar{g}_8$	+50	+83	-29	+104
9			b_5	+1	$\bar{g}_5$	$\bar{g}_0$	+80	+83	0	+163
10				-1	$\bar{g}_1$	$\bar{g}_2$	-80	+83	-56	-53
11			b_1	+1	$\bar{g}_{14}$	$\bar{g}_5$	+100	+106	-70	+143
12				-1	$\bar{g}_{10}$	$\bar{g}_{13}$	-100	+106	-109	-103
13			b_2	+1	$\bar{g}_8$	$\bar{g}_{17}$	+40	+106	-103	+43
14				-1	$\bar{g}_{16}$	$\bar{g}_1$	-40	+106	-83	-17
15	$\bar{b}_3$	$\bar{g}_9$	b_3	+1	$\bar{g}_1$	$\bar{g}_{10}$	-70	+106	-85	-49
16				-1	$\bar{g}_5$	$\bar{g}_8$	+70	+106	-29	+148
17			b_4	+1	$\bar{g}_{17}$	$\bar{g}_2$	-50	+106	-56	0
18				-1	$\bar{g}_7$	$\bar{g}_{16}$	+50	+106	-58	+98
19			b_5	+1	$\bar{g}_5$	$\bar{g}_8$	+80	+106	-29	+157
20				-1	$\bar{g}_1$	$\bar{g}_{10}$	-80	+106	-85	-59

Tab. 13: GGLP-Zielfunktionsreaktion bei marginalen Änderungen von $\bar{b}$

In Spalte 8 sind die Zielfunktionskorrekturen angegeben, die aufgrund des in Spalte 5 identifizierten Bildes der neuen rechten Seite $\underline{\tilde{b}}$ notwendig werden. Auch diese Angaben sind aus Tab. 11 übernommen. Wenn das neue $\underline{\tilde{b}}$ z.B. in G_{BZ} auf das Element $\tilde{g}_{17}$ abgebildet wird, ist eine Zielfunktionskorrektur von 103 (siehe Tab. 11, Zeile 8, Spalte 17) notwendig (Tab. 13, Zeile 4, Spalte 8). Wenn das neue $\underline{\tilde{b}}$ dem Nullelement von G_{BZ} entspricht (Zeile 6,9), dann ist die optimale LP-Lösung gleichzeitig eine optimale GGLP-Lösung; eine Korrektur ist dann nicht mehr notwendig.

In Spalte 9 ist die gesamte Änderung des optimalen GGLP-Zielfunktionswertes errechnet. Wenn etwa die 3. Komponente von $\tilde{b}_3$ um eine Einheit verkleinert wird, steigt der GGLP-Zielfunktionswert um 148 Einheiten. Dies ist einleuchtend, da durch diese Verkleinerung die 3. Nebenbedingung entlastet wird, wie aus unseren Ausgangstabellen (Tab. 2) ersichtlich wird; diese Nebenbedingung hatte ursprünglich die Form $b_3 \leq \sum_j a_{3j}\, x_j$. Diese Verbesserung von 148 Einheiten ist erheblich größer als die Verbesserung von 70, die allein durch die Vergrößerung des optimalen LP-Zielfunktionswertes zu erwarten gewesen wäre. Der Grund wird aus den Spalten 7 und 8 deutlich: während die für das ursprüngliche $\tilde{b}$ notwendige Ganzzahligkeitskorrektur zu einer LP-Zielfunktionsverschlechterung von 106 führte, ist die für das neue $\underline{\tilde{b}}$ erforderliche Korrektur mit 29 erheblich kleiner.

Interessant sind die beiden GGLP-Zielfunktionsänderungen von 0 (Zeilen 7,17), die auftreten, obwohl die zugehörigen Restriktionen verschärft werden. Durch die Veränderung des LP-Zielfunktionswertes tritt eine Verschlechterung von 50 ein,

die aber durch die Korrekturbelastungen und -entlastungen jeweils kompensiert wird. Der Grund dafür wird deutlich, wenn man die optimalen GGLP-Lösungen für $\bar{b}_1$ und $\bar{b}_3$ in Tab. 12 betrachtet. In beiden Lösungen ist es vorteilhaft, die Ganzzahligkeitskongruenz dadurch zu erfüllen, daß x_{11}, die Schlupfvariable der 4. Restriktion unseres Beispielproblems, den Wert Eins erhält. Bei einer Erhöhung der korrespondierenden Komponente b_4 um eine Einheit, wird dann die Lösungsanpassung einfach dadurch vorgenommen, daß ceteris paribus $x_{11} = 0$ gesetzt wird.

An dieser Stelle wird die oben Abschnitt (a) kurz angeschnittene Problematik der Schattenpreisermittlung in der ganzzahligen linearen Optimierung am Beispiel deutlich. Obwohl die der Nebenbedingung 4 zugehörige Schlupfvariable x_{11} in den optimalen GGLP-Lösungen für $\bar{b}_1$ und $\bar{b}_3$ positiv ist, muß man diese Nebenbedingung als bindend ansehen. Wenn nämlich eine Lockerung der 4. Restriktion durchgeführt, b_4 also um Eins vermindert wird, läßt sich der GGLP-Zielfunktionswert verbessern. Er steigt bei einer entsprechenden Abwandlung von $\bar{b}_1$ um 104 Einheiten, und korrespondierend bei $\bar{b}_3$ um 98 Einheiten.

An dem Zahlenbeispiel zeigt sich weiter, daß die Änderung des GGLP-Zielfunktionswertes bei marginalen Änderungen von $\bar{b}_1$ und $\bar{b}_3$ hier für kein b_i mit dem Wert übereinstimmt, der sich aufgrund des LP-Schattenpreises ergeben würde (Vergleich Spalte 6 und Spalte 9). Dennoch lassen sich die Zahlen der Spalte (9), wie oben schon angedeutet wurde, in ähnlicher Weise als Entscheidungshilfe verwenden wie Schattenpreise.

Man könnte z.B. überlegen, ob beim Ausgangsniveau $\bar{b}_3$ eine Erhöhung der durch die 5. Restriktion repräsentierten Faktorart um eine Einheit lohnend ist. Dazu ist zu prüfen, ob die Zielfunktionsverbesserung von 157 die Mehrausgaben überkompensiert, die durch diese Vergrößerung des Ressourceneinsatzes notwendig werden. In gleicher Weise kann man mit allen anderen Faktorarten verfahren. Eine Gesamtstrategie läßt sich aus einem Vergleich dieser Einzelabwandlungen ableiten.

Wir haben in Tab. 13 nur die Reaktionen des optimalen GGLP-Zielfunktionswertes auf marginale Änderungen von $\bar{b}$ verdeutlicht. Die Lösungsreaktionen für $\bar{x}_B$ und $\bar{x}_N$ werden nicht mehr gesondert am Zahlenbeispiel aufgezeigt. Auf eine solche Lösungsreaktion soll jedoch noch hingewiesen werden, da sie in den bisherigen Zahlenbeispielen schon enthalten ist.

Der aus der Abwandlung der 2. Komponente von $\bar{b}_3$ um eine Einheit nach oben entstehende Vektor entspricht nämlich dem in den Zahlenbeispielen verwandten Vektor $\bar{b}_4$ (siehe Tab. 7). Wir können deshalb die Lösungsreaktion an einem Vergleich von Zeile 3 und 4 in Tab. 12 verfolgen. In Spalte 4 zeigt sich dort, daß die Reaktionen der ganzzahligen Basisvariablen auf eine marginale Änderung der Komponente b_2 erheblich sind. Die Zielfunktionsdifferenz von 178 427 - 178 384, aus Spalte 7 in Tab. 12 ersichtlich, entspricht dem in Tab. 13 (Zeile 13, Spalte 9) ausgewiesenen Wert.

33. Das GGLP-Polyeder

(a) Problemstellung

Oben (321-g) wurde das Polyeder $P_{\bar{x}_N}(G_{BZ}, K^N_{BZ}, \bar{g}_o)$ definiert. Dieses stellt den asymptotischen Zulässigkeitsbereich unseres betrachteten GGLP-Problems im Raum der Nebenbasisvariablen $\bar{x}_N$ dar. Da $\bar{x}_{NZ} \in Z^{n_{NZ}}$ und $\bar{x}_{NQ} \in Q^{n_{NQ}}$ gilt:

$$(1)\quad P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o) \subset Z^{n_{BZ}} \oplus Q^{n_{NQ}}.$$

Im weiteren werden einige Merkmale der Eckpunkte und Außenflächen dieses Polyeders untersucht und algorithmische Anwendungsmöglichkeiten der dabei gewonnenen Ergebnisse aufgezeigt. Mit Außenflächen von $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ sind $(n_{BZ} + n_{NQ} - 1)$ - dimensionale Hyperebenen gemeint, welche die Punkte des Polyeders zu einer Seite begrenzen und die durch die auf ihnen liegenden Polyederpunkte durch Linearkombination erzeugbar sind.

Das korrespondierende Polyeder für das RGLP-Problem wurde von GOMORY [1969] schon einer ausführlichen Analyse unterzogen, in deren Anschluß weitere Untersuchungen folgten (z.B. GLOVER [1969]). Die dabei gewonnenen Ergebnisse sind teils direkt auf $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ anwendbar, insbesondere soweit es den Unterraum der ganzzahligen Nebenbasisvariablen unseres Problems betrifft, teils bedürfen sie einer entsprechenden Anpassung. Wir werden im weiteren deshalb vor allem auf diese Anpassung und die neuartigen Aspekte eingehen, die durch die Einbeziehung nichtganzzahliger Variabler hinzukommen.

Dazu werden die Prinzipien der Außenflächenermittlung aufgezeigt und am Zahlenbeispiel die Verwendung dieser Außenflächen als Schnittebenen verdeutlicht. Es läßt sich nachweisen, daß diese Außenflächen in bestimmter Sicht die strengsten überhaupt ableitbaren Schnittebenen für GGLP-Probleme sind.

Diese GGLP-Optimierung über Schnittebenen, die aus $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ abgeleitet wurden, hat vor allem darin Vorzüge, eine parametrische Optimierung des GGLP-Problems für die Zielfunktion zu ermöglichen. Während der Gruppenoptimierungsansatz seiner Natur nach für eine Sensitivitätsanalyse in bezug auf die rechte Seite $\bar{b}$ des GGLP-Problems sehr geeignet ist, wie in Kap. 322. gezeigt wurde, ist der Schnittebenenansatz für eine Sensitivitätsanalyse des Problems im Hinblick auf die Zielfunktionskoeffizienten $\bar{c}$ verwendbar. Auch das wird am Zahlenbeispiel veranschaulicht.

(b) Grundsätzliche Veranschaulichung des GGLP-Polyeders an einem Beispiel

Dieser Abschnitt (b) verfolgt das Ziel, eine gewisse Anschaulichkeit über $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ zu vermitteln, bevor Eigenschaften von Ecken und Außenflächen dieses Polyeders genauer untersucht werden. Hier wird vor allem die Irreduzibilität der Eckpunkte von $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ und die Reduzibilität anderer Punkte auf Außenflächen aufgezeigt.

Die Diskussion erfolgt anhand des Zahlenbeispiels, wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit der graphischen Darstellung nur der Unterraum der nichtganzzahligen Nebenbasisvariablen x_{13} und x_{14} betrachtet wird. Wie man die Außenflächen des Beispielspolyeders numerisch bestimmen kann, wird später dargestellt.

Für jede rechte Seite $\bar{b}^k$, deren Bild in $G_{BZ}\, \nu_S\, P_1\, \bar{b}^k = [0,1,4]'$ ist (im Zahlenbeispiel z.B. $\bar{b}_7$), werden die Außenflächen des asymptotischen Zulässigkeitsbereichs im Raum der beiden nichtganzzahligen Nebenbasisvariablen durch die drei Ungleichungen:

$$
\begin{aligned}
(2)\quad N_A:\ & 14/2\ x_{13} && \geq 1\\
N_B:\ & 14/21\ x_{13} + 14/20\ x_{14} && \geq 1\\
N_C:\ & 14\ x_{14} && \geq 1
\end{aligned}
$$

festgelegt. Der Zulässigkeitsbereich ist in Abb. 8 wiedergegeben; das Polyeder $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_0^k)$ entspricht den fett gezeichneten Punkten in dem durch die Koordinatenachsen abgesteckten Bereich. Diese Punkte $[x_{13}^k, x_{14}^k]'$ haben die Eigenschaft, über

$$(3)\quad \bar{x}_B = B^{-1}\,(\bar{b}^k - N\,[x_{13}^k, x_{14}^k]')$$

ganzzahliges $\bar{x}_{BZ}$ für alle rechten Seiten $\bar{b}^k$ zu produzieren.

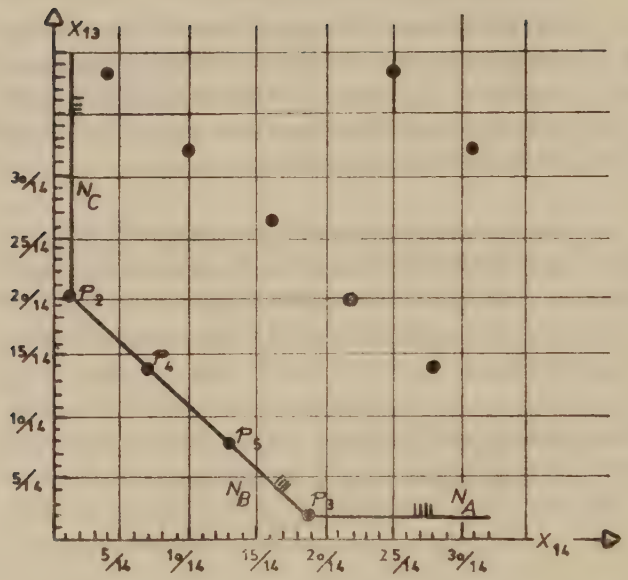


Abb. 8: Ein Teil von $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_0)$ für $\bar{g}_0 = [0,1,4]'$

Aus der Abbildung wird deutlich, daß für die rechten Seiten $\bar{b}^k$ die Ganzzahligkeitsreste der ganzzahligen Basisvariablen nur eliminiert werden können, wenn sowohl x_{13} als auch x_{14} positiv ist. Durch eine der Nebenbasisvariablen allein ist also die Ganzzahligkeitskongruenz nicht erfüllbar. Dies hängt von der numerischen Struktur des Problems ab und kann nicht verallgemeinert werden. Für andere rechte Seiten $\bar{b}^h$ mit $\nu_S P_1 \bar{b}^k \neq \nu_S P_1 \bar{b}^h$ ist es durchaus möglich, daß eine der nichtganzzahligen Nebenbasisvariablen allein die Kongruenz

erfüllen kann, wie wir später am Zahlenbeispiel auch noch sehen werden. Allgemeine Aussagen zu diesem Fragenkreis werden gleichfalls folgen.

$P_{\underline{x}_N}(\bar{g}_o^k)$ besitzt zwei Eckpunkte p_2 und p_3, die nach Satz (321-42) irreduzibel sind. Neben diesen beiden Eckpunkten liegen in der "Hyperebene" N_B noch die beiden Punkte p_4 und p_5, die gleichfalls ganzzahliges $\bar{x}_{BZ}$ erzeugen. p_4 und p_5 sind als Linearkombinationen von p_2 und p_3 darstellbar. Die Substitutionsraten zwischen diesen Punkten gehen aus einem Vergleich der Koordinaten hervor:

	P_2	P_4	P_5	P_3
x_{13}	1/14	7/14	13/14	19/14
x_{14}	20/14	14/14	8/14	2/14

Daraus wird deutlich, daß durch $6/14\ x_{13}$ die gleichen Reste mod $\bar{S}_{Z1}$ produziert werden, wie durch $6/14\ x_{14}$; in diesen Raten sind x_{13} und x_{14} also substituierbar. Aus den Austauschraten lassen sich zwei unterschiedliche Vektoren $\bar{\underline{x}}_N$ und $\bar{\underline{x}}_N$ konstruieren, die für p_4 und p_5 Reduzibilität anzeigen [siehe Def. (321-42)]. Die Reduzibilität sei hier numerisch nachgewiesen. Sowohl für p_4 als auch für p_5 sind die folgenden Bedingungen erfüllt:

(4)	$\bar{\underline{x}}_N$	$\bar{0} \leq \begin{bmatrix} 6/14 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 7/14 \\ 14/14 \end{bmatrix}$	$\bar{0} \leq \begin{bmatrix} 6/14 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 13/14 \\ 8/14 \end{bmatrix}$
	$\bar{\underline{x}}_N$	$\bar{0} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 6/14 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 7/14 \\ 14/14 \end{bmatrix}$	$\bar{0} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 6/14 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 13/14 \\ 8/14 \end{bmatrix}$
		P_4	P_5

$\bar{\underline{x}}_N$ und $\bar{\underline{x}}_N$ produzieren mod $\bar{\underline{S}}_{Z1}$ gleiche Reste:

$$(5)\quad \underline{N}_1\,\bar{\underline{x}}_N \equiv \underline{N}_1\,\bar{\underline{x}}_N \pmod{\bar{\underline{S}}_{Z1}}.$$

In unserem Beispiel entsprechen $\underline{N}_1$ hier die beiden Spalten $\bar{\underline{a}}_{1,13}$ und $\bar{\underline{a}}_{1,14}$, die in Tab. 7 errechnet wurden; es gilt also:

$$\bar{\underline{a}}_{1,13}\ 6/14 \equiv \bar{\underline{a}}_{1,14}\ 6/14 \pmod{\bar{\underline{S}}_{Z1}}$$

$$\begin{matrix}1\\[3]\\2\end{matrix}\ 6/14 \equiv \begin{bmatrix}-6\\-4\\16\end{bmatrix}\ 6/14 \pmod{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{bmatrix}}$$

$$\begin{matrix}6/14\\[18/14]\\12/14\end{matrix} \equiv \begin{bmatrix}-36/14\\-24/14\\96/14\end{bmatrix}$$

$$\equiv \begin{matrix}42/14 - 36/14\\[42/14 - 24/14]\\-84/14 + 96/14\end{matrix} = \begin{matrix}6/14\\[18/14]\\12/14\end{matrix}$$

Aus dieser Betrachtung wird deutlich, daß nur Eckpunkte einer Außenfläche von $P_{\bar{\underline{x}}_N}(\bar{g}_o)$ irreduzibel sein können, da sich alle anderen Polyederpunkte einer Außenfläche durch Konvexkombinationen aus den Eckpunkten ableiten lassen. Damit werden dann Austauschraten im eben erwähnten Sinn konstruierbar, aus denen man Punkte $\bar{\underline{x}}_N$ und $\bar{\underline{x}}_N$ ableiten kann, welche die Reduzibilität nachweisen.

Im allgemeinen gilt jedoch für $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$, daß nicht nur Eckpunkte irreduzibel sind, sondern auch noch andere irreduzible Punkte gegeben sein können (GOMORY[1969, S. 460]). Diese liegen dann allerdings nicht auf Außenflächen, wie gezeigt wurde.

(c) Beziehungen zwischen Lösungen des Gruppenoptimierungsproblems und $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$

Jede zulässige Lösung des Gruppenminimierungsproblems (321-24) korrespondiert mit einer Menge von Punkten aus $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ Umgekehrt führt jeder Punkt aus $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ zu einer bestimmten Lösung des Gruppenminimierungsproblems.

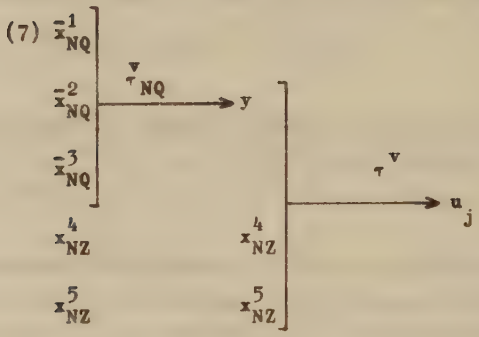
Dies ist einmal darin begründet, daß sich über τ_{NQ} mehrere unterschiedliche rationale Linearkombinationen der Spalten aus N_{Q1} auf ein Element $\bar{a}_{1h} \in K_{BZ}^{NQ}$ abbilden lassen (321-10). Zum zweiten können dann über τ noch einmal Verdichtungen stattfinden (321-22). Die Abbildungen (dargestellt am Beispiel der Variablen):

$$(6)\quad \begin{bmatrix} \bar{x}_{NZ} \\ \bar{x}_{NQ} \end{bmatrix} \xrightarrow{\tau_{NQ}^{v}} \begin{bmatrix} \bar{x}_{NZ} \\ \bar{y} \end{bmatrix} \xrightarrow{\tau^{v}} \bar{u}$$

sind eindeutig, wie unter 321. diskutiert wurde, während die inversen Abbildungen nicht mehr eindeutig sein müssen. Aus einer zulässigen Lösung $\bar{u}$ der Gruppenoptimierungsaufgabe läßt sich also eine Menge asymptotischer GGLP-Lösungen ableiten. Ein Beispiel soll dies veranschaulichen.

In einem Problem sei folgende Zuordnung gegeben:

(7)



Das der Variablen u_j entsprechende Gruppenelement $\bar{g}_j$ ist also in 5-facher Weise aus $\underline{N}_1$ darstellbar: die drei bestimmten rationalen Vektoren $\bar{x}^1_{NQ}$ bis $\bar{x}^3_{NQ}$ können es über $\underline{N}_{Q1}$ erzeugen und weiterhin werden die den ganzzahligen Nebenbasisvariablen x^4_{NZ} und x^5_{NZ} aus $\underline{N}_{Z1}$ entsprechenden Spalten auf das Gruppenelement $\bar{g}_j$ abgebildet.

Aus einer zulässigen Lösung des Gruppenoptimierungsproblems, in der die Variable u_j den Wert $u_j = u^*_j$ annimmt, lassen sich Punkte von $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ ermitteln, bei denen aus u^*_j abgeleitet wird:

(8)

v_1 $\bar{x}^1_{NQ}$

v_2 $\bar{x}^2_{NQ}$

v_3 $\bar{x}^3_{NQ}$ $\qquad \sum_{i=1}^{5} v_i = u^*_j$; v_i ganzzahlig

v_4 x^4_{NZ}

v_5 x^5_{NZ}

Man kann allgemein also nichtnegative ganzzahlige Linearkombinationen zwischen den über τ^{-1} und τ_{NQ}^{-1} möglichen Zuordnungen vornehmen.

Notwendige Bedingung für die Ableitung von Ecklösungen ist, daß höchstens eine Variable v_i positiv gesetzt wird. Dies ist leicht einzusehen. Alle von $\bar{\underset{\sim}{u}}$ über τ^{-1} und τ_{NQ}^{-1} erreichbaren Punkte $\bar{\underset{\sim}{x}}_N$ unterscheiden sich ja. Wenn eine Aufteilung vorgenommen wird, bei der wenigstens zwei v_i positiv sind, bedeutet dies, daß mindestens zwischen zwei Komponenten x_i^1 und x_i^2, $x_i^1 \neq x_i^2$, zweier unterschiedlicher Vektoren $\bar{\underset{\sim}{x}}_N^1$ und $\bar{\underset{\sim}{x}}_N^2$ eine Linearkombination vorgenommen wird. Ein solcher Punkt kann aber nicht mehr Eckpunkt sein. Diese Bedingung für die Ableitung von Eckpunkten stimmt für den ganzzahligen Nebenbasisteil mit den entsprechenden Aussagen für das RGLP-Problem überein (GOMORY [1969, S. 458]).

Wir sind bisher von einer vorgegebenen zulässigen Lösung $\bar{u}$ des Gruppenminimierungsproblems ausgegangen. Wir wollen diese Lösung etwas näher betrachten.

Da das Gruppenminimierungsproblem (321-24) die gleiche Struktur hat, wie das entsprechende für den RGLP-Fall, lassen sich alle Aussagen, die für die Gruppenminimierungsaufgabe im RGLP-Problem gewonnen wurden, auf unsere Aufgabe (321-24) übertragen. Es ist der Zulässigkeitsbereich dieser Aufgabe, der bei GOMORY [1969] einer ausführlichen Analyse unterzogen wird. Da im RGLP-Fall die Beziehungen zwischen dem diesen Zulässigkeitsbereich darstellenden Polyeder und dem durch den Nebenbasisteil des RGLP-Problems gebildeten Polyeder sehr eng sind, ist es aus verschiedensten Gründen zweckmäßig, das Polyeder der Gruppenminimierungsaufgabe zu betrachten, anstatt direkt den Zulässigkeitsbereich des Nebenbasisteils zu untersuchen.

Diese direkte Korrespondenz ist im GGLP-Problem nicht mehr gegeben, da im allgemeinen Fall ein nichtganzzahliger Nebenbasisteil vorhanden sein kann. Deshalb legen wir hier immer $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ zugrunde. Dennoch können eine Vielzahl der Ergebnisse für das Polyeder der Gruppenminimierungsaufgabe auf das GGLP-Problem übertragen werden.

Ecklösungen $\bar{u}$ für die Gruppenminimierungsaufgabe liegen nur vor, wenn $\bar{u}$ irreduzibel ist; dies folgt aus Satz (321-42), der ja den Spezialfall der reinen Ganzzahligkeit mit umfaßt. Diese Ecklösungen für die Gruppenminimierungsaufgabe sind notwendige Bedingungen dafür, um aus $\bar{u}$ Ecklösungen für $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ abzuleiten.

Im Abschnitt (b) wurde nämlich gezeigt,daß Randlösungen allgemein nur irreduzibel sein können, wenn sie Ecklösungen sind. Um Randlösungen von $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ abzuleiten, muß auch eine Randlösung der Gruppenminimierungsaufgabe gegeben sein. Wenn wir eine reduzible Randlösung der Gruppenminimierungsaufgabe nehmen, läßt sich die besprochene Substitutionsmöglichkeit [Abschnitt (b)] über τ^{-1} und τ_{NQ}^{-1} durchführen. Mithin ist auch der aus einer reduziblen Randlösung des Gruppenminimierungsproblems abgeleitete Punkt von $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ reduzibel, unabhängig davon, ob τ^{-1} und τ_{NQ}^{-1} eindeutig sind oder nicht.

Reduzible Punkte können bei der Gruppenoptimierung für $\bar{u}$ ermittelt werden, wenn mehrfach-optimale Lösungen des GGLP-Problems vorliegen. Anschaulich gesprochen läuft dann die Zielfunktionshyperebene im Raum der Nebenbasisvariablen parallel zu einer Außenfläche von $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$.

Weiterhin sei festgehalten, daß wir über τ^{-1} und τ_{NQ}^{-1} ausgehend von einer Ecklösung des Gruppenminimierungsproblems auf jeden Fall eine Ecklösung des GGLP-Problems erreichen können, sofern $P_{\underline{x}_N}(\bar{g}_o)$ nicht leer ist. Bei der Ermittlung der potentiellen rationalen Lösungen für den nichtganzzahligen Nebenbasisteil in der Festlegung von K_{NQ} wurde garantiert, daß keine der über diese nichtganzzahligen Variablen erzeugbaren Ecklösungen ausgeschlossen wird (Kap. 242.). Da über τ^{-1} und τ_{NQ}^{-1} jede dieser potentiellen Lösungen erreicht werden können, müssen auch Ecklösungen ermittelt werden können.

Aus dieser Diskussion der Beziehungen zwischen den Lösungen der Gruppenoptimierungsaufgabe und dem Polyeder $P_{\underline{x}_N}(\bar{g}_o)$ soll für das weitere vor allem festgehalten werden, daß aus einer Gruppenlösung im allgemeinen mehrere Punkte von $P_{\underline{x}_N}(\bar{g}_o)$ abgeleitet werden können und daß eine notwendige Bedingung für die Ermittlung einer Ecke von $P_{\underline{x}_N}(\bar{g}_o)$ über das Gruppenminimierungsproblem das Vorliegen einer irreduziblen Gruppenlösung $\bar{u}$ ist.

(d) Beziehungen zwischen $P_{\underline{x}_E}(B,N,\bar{b})$ und $P_{\underline{x}_N}(\bar{g}_o)$

Oben (321-b) wurde das Polyeder $P_{\underline{x}_E}(B,N,\bar{b})$ eingeführt, das den asymptotischen Zulässigkeitsbereich des GGLP-Problems im Raum der eigentlichen Variablen der Aufgabe widerspiegelt. Dies geschah deshalb, weil bei den üblichen graphischen Interpretationen von mathematischen Programmierungsproblemen zumeist in diesem Raum gearbeitet wird und - speziell bei GLP-Interpretationen - der Begriff der konvexen Hülle zulässiger GLP-Punkte in diesem Raum veranschaulicht wird.

$P_{\bar{x}_B}(B,N,\bar{b})$ und $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ geben den gleichen Zulässigkeitsbereich wieder, wie oben schon bei der Definition dieser Polyeder festgehalten wurde (321-g). Diese Aussage sei hier arithmetisch vertieft; eine geometrische Interpretation ist zwar auch grundsätzlich möglich, aber sicherlich -wie häufig bei derartigen Erläuterungen in der mathematischen Programmierung - entweder bei großer Anschaulichkeit zu unpräzise und vereinfacht oder bei genauer Analyse zu schwerfällig und kompliziert, somit unanschaulich.

Der asymptotische GGLP-Zulässigkeitsbereich (321-40) ist mit dem durch das folgende System beschriebenen Polyeder identisch:

$$(9)\ (\alpha)\quad B\ \bar{x}_B + N\ \bar{x}_N = \bar{b}$$

$$(\beta)\quad D\ \bar{x}_N \geq \bar{d}_o$$

das nach Einführung eines Schlupfvariablenvektors $\bar{x}_S$ lautet:

$$(10)\ (\alpha)\quad B\ \bar{x}_B + N\ \bar{x}_N = \bar{b}$$

$$(\beta)\quad D\ \bar{x}_N - \bar{x}_S = \bar{d}_o$$

jeweils ist zu beachten:

$$(11)\ \bar{x}_{BZ} \in Z^{n_{BZ}};\ \bar{x}_{NZ} \in Z^{n_{NZ}}$$

$$(12)\ \bar{x}_{BQ} \in Q^{n_{BQ}};\ \bar{x}_{NQ} \in Q^{n_{NQ}}$$

$$\bar{x}_N \geq \bar{0}$$

Dabei beschreibt das Teilsystem:

(13) $D\ \bar{x}_N \geq \bar{d}_o$

mit der $(n_D \cdot n_N)$-Matrix D das Polyeder $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$. D und $\bar{d}_o$ bestehen ausschließlich aus Koeffizienten, die größer/gleich Null sind. Das Polyeder $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$, und insbesondere das ist ein Sachverhalt, der hier gezeigt werden sollte, ist dabei identisch mit dem Polyeder (10) im Unterraum der Nebenbasisvariablen $\bar{x}_N$.

Da nämlich $\bar{x}_B$ im asymptotischen Problem keiner Nichtnegativitätsbedingung unterliegt, stellt (α) keine Restriktion für $\bar{x}_N$ dar. $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ wird also allein durch (ß) bestimmt. Danach ist $\bar{x}_N$ nach oben nicht beschränkt. Das über (10) durchgeführte Minimierungsproblem besitzt aber dennoch eine endliche Lösung, da die Zielfunktionskoeffizienten der Variablen $\bar{x}_N$ alle größer/gleich Null sind. Zum Vergleich sei darauf verwiesen, daß mit dieser Interpretation das Beispiel für $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ in Abb. 8 und System (2) korrespondiert.

Durch $D\ \bar{x}_N \geq \bar{d}_o$ wird vom LP-Zulässigkeitsbereich unseres GGLP-Problems in der durch $\bar{x}_B$ repräsentierten Ecke eine Menge von unzulässigen Lösungen, aber keine zulässige Lösung, des GGLP-Problems abgeschnitten. $D\ \bar{x}_N \geq \bar{d}_o$ beschreibt also einen Teil der konvexen Hülle des GGLP-Zulässigkeitsbereichs. Und zwar enthält $D\ \bar{x}_N \geq \bar{d}_o$ alle Begrenzungsflächen der konvexen Hülle, die sich aus nichtnegativen Linearkombinationen der den optimalen LP-Eckpunkt bildenden Hyperebenen ableiten lassen.

Diese Aussage korrespondiert mit der aus der LP-Theorie bekannten Aussage, daß ein LP-Eckpunkt dann optimal ist, wenn die ihn bildenden Hyperebenen die Zielfunktionshyperebene nichtnegativ linear zu kombinieren vermögen bzw. solange optimal bleibt wie - bei variabler Zielfunktion - die Linearfaktoren nichtnegativ bleiben. Entsprechend sind die Zielfunktionskoeffizienten aller Nebenbasisvariablen nichtnegativ wie auch alle Koeffizienten von D.

Weiterhin lassen sich über diesem asymptotischen Zulässigkeitsbereich gemischt-ganzzahlige, in asymptotischer Sicht zulässige Lösungen für alle Zielfunktionen finden, für die auch der zugehörige LP-Optimalpunkt optimal bleibt. Diese Suche nach der optimalen GGLP-Lösung kann in diesem Bereich mit LP-Algorithmen unter Vernachlässigung der Bedingungen (11) geschehen,da alle Eckpunkte des Systems (10) von den Ganzzahligkeitsbedingungen her zulässige GGLP-Lösungen sind.

$D\ \bar{x}_N \geq \bar{d}_c$ enthält alle Ganzzahligkeitsinformationen für den oben diskutierten Bereich. Die gleichen Zusammenhänge kann man auch im Raum der eigentlichen Variablen des GGLP-Problems betrachten, wenn man etwa von einem Ungleichungssystem für die zu lösende GGLP-Aufgabe ausgegangen ist. Diese Untersuchung bezieht sich dann auf $P_{x_E}(B,N,\bar{b})$, mit anderen Worten, den im Unterraum der eigentlichen Variablen von System (10) beschriebenen Bereich. In dem Abb. 2 zugrundeliegenden Beispiel wird dieses Polyeder durch die "Außenflächen" N_A, $\overline{P_2P_3}$, N_B begrenzt. Da alle Eckpunkte dieses Bereichs von den Ganzzahligkeitsbedingungen her zulässige GGLP-Lösungen darstellen, ist dort eine Optimierung mit LP-Algorithmen möglich.

Diese Eckpunkte korrespondieren mit Basislösungen von System (10). Alle Basislösungen dieses Gleichungssystems, in denen $\bar{x}_B$ als Basisvariable verbleibt, erfüllen die Ganzzahligkeitsbedingungen für $\bar{x}$. Da insgesamt $(m + n_D)$ Gleichungen vorhanden sind, müssen neben $\bar{x}_B$ noch n_D andere Variable Basisvariable sein.

Die weiteren Untersuchungen beschäftigen sich vor allem damit, das System $D\ \bar{x}_N \geq \bar{d}_o$, oder mit anderen Worten, die Außenflächen von $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ zu bestimmen, und Aussagen über seine Basislösungen, bzw. die Eckpunkte von $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$, zu machen.

(e) Zahl positiver GGLP-Variabler in GGLP-Ecklösung

Zunächst wird diese letzte Frage behandelt und eine Abschätzung der Zahl positiver Variabler in einer GGLP-Ecklösung vorgenommen.

Die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten aus $\underline{\underline{N}}_{Q1}$ und damit die Maximalzahl positiver nichtganzzahliger Nebenbasisvariabler sei r_N [siehe dazu (242-b)]; es ist $n_{BZ} \geq r_N$.

Die Zahl der Elemente von K_{BZ}^{NQ}, also der über den nichtganzzahligen Nebenbasisteil mit $\bar{x}_{NQ}$ $(\bar{0} \leq \bar{x}_{NQ} \leq \bar{1};\ \bar{x}_{NQ} \in Q^{n_{NQ}})$ direkt erzeugbaren Elemente aus G_{BZ} wurde oben schon mit p definiert (242-31).

r_B sei die Zahl der über den ganzzahligen Nebenbasisteil mit $\bar{x}_{NZ}$ $(\bar{0} \leq \bar{x}_{NZ} \leq \bar{1};\ \bar{x}_{NZ} \in Z^{n_{NZ}})$ produzierbaren Elemente aus G_{BZ}; die zugehörige Menge wurde als K_{BZ}^{NZ} eingeführt.

Schließlich sei die Zahl der Elemente von $K_{BZ}^{NZ} \cap K_{BZ}^{NQ}$, also der Elemente, die sowohl über den ganzzahligen als auch den nichtganzzahligen Nebenbasisteil erzeugbar sind, t genannt.

Dann läßt sich die Zahl q der Elemente von K_{BZ}^{N} (321-20) darstellen als:

(14) $|K_{BZ}^{N}| = q = p + r_B - t.$

Damit kann man festhalten:

(15) Satz: Positive Komponenten der Eckpunkte von $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$.

Für die Zahl v positiver Komponenten der Eckpunkte von $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ gilt:

$v \leq r_N + r_B$

Beweis:

Aus der Irreduzibilität der Eckpunkte folgt, daß zur Erzeugung eines Elementes $\bar{g}_o = \sum_i \bar{g}_i u_i$ für jedes g_i höchstens eine der über τ^{-1} und τ_{NQ}^{-1} gegebenen Möglichkeiten gewählt werden kann [siehe (c)]. Also ist die Maximalzahl positiver u_i $p + r_B - t$ (wie im HGLP-Fall).

Die Maximalzahl positiver Komponenten von $\bar{x}_{NQ}$ ist jedoch unabhängig von p; sie ist auf jeden Fall r_N.

Wenn alle Elemente $\bar{g}_h \in K_{BZ}^{NZ} \cap K_{BZ}^{NQ}$ durch den ganzzahligen Nebenbasisteil produziert werden, ergeben sich somit maximal $r_N + r_B$ positive Komponenten für die Elemente.

*****

Daraus können wir jetzt in Ergänzung von Satz (242-3) für die Maximalzahl positiver Variabler in einer GGLP-Ecklösung festhalten:

(16) Satz: Variablenzahl in optimaler GGLP-Ecklösung

Wenn eine GGLP-Aufgabe überhaupt eine optimale Lösung besitzt, existiert immer auch eine optimale Ecklösung.

Die Zahl z positiver Variablen ist dabei:

$$z \leq n_{BZ} + r_B + n_{BQ} + r_N \leq n_{BZ} + r_B + m$$

Beweis:

Aus der Verbindung der Gruppenoptimierungsaufgabe mit $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ und der Formulierung dieser Aufgabe ergibt sich, daß immer dann, wenn die Ganzzahligkeitskongruenz überhaupt erfüllbar ist, auch Ecklösungen vorhanden sein müssen.

Für diese Ecklösungen folgt dann die vorgenommene Abschätzung von z im Zusammenhang mit Satz (15) und Satz (242-3).

Die Aussagen über Ecklösungen wurden jedoch nur in asymptotischer Sicht formuliert; der Satz ist aber allgemeiner. Es bleibt also zu beweisen, daß die Abschätzung für z auch gilt, wenn die aus dem optimalen LP-Punkt des GGLP-Problems und damit für das Polyeder $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ abgeleitete asymptotische Lösung unzulässig ist.

Die konvexe Hülle aller zulässigen GGLP-Punkte ist der Durchschnitt aller aus zulässigen und unzulässigen LP-Ecklösungen ableitbaren asymptotischen Zulässigkeitsbereiche.

Denn durch keinen dieser asymptotischen Bereiche kann eine zulässige GGLP-Lösung abgeschnitten werden und mit dieser Durchschnittsbildung wird die Umgebung aller Ecken des LP-Zulässigkeitsbereiches durch die konvexe Hülle der zulässigen GGLP-Punkte ersetzt.

Sofern der Durchschnitt nicht leer ist, muß damit der optimale GGLP-Punkt in irgendeinen asymptotischen Zulässigkeitsbereich und damit ein Polyeder $P'_{\underline{x}_N}(\bar{g}_o)$ fallen, das aus anderen Hyperebenen abgeleitet ist, als denen, die den optimalen LP-Eckpunkt bilden.

Entsprechend der Aussage zu Beginn des Beweises muß dann für diesen Bereich $P'_{\underline{x}_N}(\bar{g}_o)$ eine Ecklösung ableitbar sein, für welche gleichfalls die behauptete Abschätzung von z gilt. Die Größen n_{BZ}, n_{BQ}, r_B und r_N sind dann für diesen asymptotischen Bereich definiert.

*****

(f) Ableitung von "strengsten" Schnittebenen an LP-Eckpunkten

Aus dem Beweis zu Satz (16) wird deutlich, in welchem Sinn über $P_{\underline{x}_N}(\bar{g}_o)$ die strengsten Schnittebenen ableitbar sind, die an einem LP-Eckpunkt überhaupt erzeugt werden können. Die konvexe Hülle aller zulässigen GGLP-Punkte läßt sich als Durchschnittsmenge aller von LP-Eckpunkten des GGLP-

Problems determinierten asymptotischen Zulässigkeitsbereiche auffassen. Jeden dieser asymptotischen Zulässigkeitsbereiche kann man nur unter Verarbeitung der numerischen Eigenschaften des zugehörigen LP-Eckpunktes ermitteln. Diese Verarbeitung bedeutet nichts anderes als eine Analyse der mit dem bestimmten Eckpunkt korrespondierenden Basis B in der in Kap. 2 beschriebenen Weise.

LP-Eckpunkt bedeutet weiterhin, daß eine Menge von m sich schneidenden Hyperebenen gegeben ist, die diesen Eckpunkt bilden. Es sind genau diese Hyperebenen, an die sich der zugehörige asymptotische Zulässigkeitsbereich "anschmiegt". Die Steigung der neu hinzukommenden Hyperebenen kann dabei äußerstenfalls gleich der Steigung der den Eckpunkt erzeugenden Hyperebenen werden; in allen anderen Fällen ergibt sie sich aus einer nichtnegativen Linearkombination der Hyperebenen, in denen der LP-Eckpunkt liegt.

Diese gesamte Betrachtungsweise bezieht sich nur auf einen bestimmten Eckpunkt, sie impliziert eine Vernachlässigung der Information über andere Eckpunkte, die ja mit einer anderen Basis mit anderen Hyperebenen korrespondieren. Insofern heißt also strengster Schnitt an einem Eckpunkt durch Ableitung der Außenflächen des zugehörigen $P_{\underline{x}_N}(\bar{g}_o)$, daß nur die aus diesem Eckpunkt zu erhaltenden Informationen verwertet werden, wobei der Einfluß anderer Eckpunkte unberücksichtigt bleibt. Ein graphisches Beispiel soll diese Betrachtung abrunden.

In Abb. 9 wird der LP-Eckpunkt p_1 durch die Geraden N_A und N_B erzeugt. Wenn man diesen Eckpunkt entsprechend der in Kap. 2 beschriebenen Weise numerisch analysiert, bleibt N_C unbeach-

tet. Entsprechend ist aus p_1 nur das durch N_B, $\overline{r_2r_3}$, und N_A begrenzte Polyeder ableitbar. Der am Eckpunkt p_1 erzielbare strengste Schnitt wird durch $\overline{r_2r_3}$ gebildet. Analog verhält es sich mit p_3 und dem daraus ermittelbaren strengsten Schnitt $\overline{r_1r_4}$. In gleicher Weise ist aus p_2 der tiefste Schnitt $\overline{r_2r_4}$ zu errechnen.

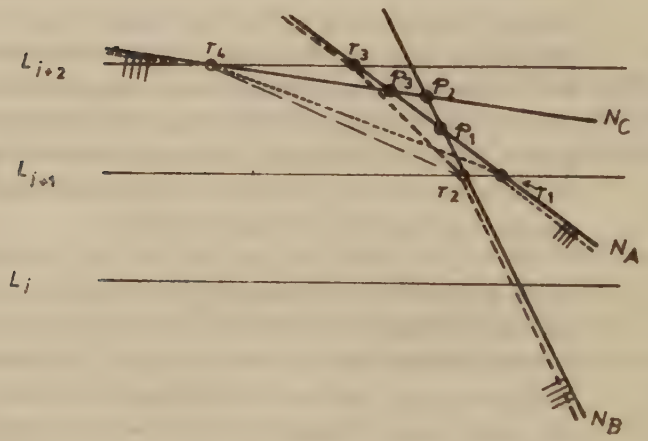


Abb. 9: Veranschaulichung Ableitung strengster Schnitte

Jede dieser Analysen bezieht sich auf einen Eckpunkt. Daraus in einem bestimmten Sinn strengste Schnitte ableiten zu können heißt, daß dieser tiefste Schnitt nicht die konvexe Hülle des GGLP-Zulässigkeitsbereiches treffen muß, wohl aber die nur von diesem Eckpunkt her gesehen äußerste Möglichkeit darstellt, nichtzulässige GGLP-Lösungen auszuschließen.

In Abb. 9 entspricht die konvexe Hülle in der Umgebung der Punkte p_1, p_2 und p_3 dem aus p_2 als unzulässigem LP-Eckpunkt abgeleiteten asymptotischen Zulässigkeitsbereich. Die aus den zulässigen LP-Punkten p_3 und p_1 gebildeten Polyeder $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_0)$ stimmen nur in den Eckpunkten r_4 bzw. r_2 mit den Ecken des GGLP-Zulässigkeitsbereiches überein.

In diesem Zusammenhang sei auf einen verwandten Problemkreis verwiesen. Für Schnittebenenalgorithmen zur GLP-Optimierung sind in den letzten Jahren eine Reihe von Vorschlägen mit dem Ziel erarbeitet worden, die ursprünglich von GOMORY([1960]; siehe auch: DANTZIG [1966, S. 590-608]) formulierten Bedingungen für die Berechnung von Schnitthyperebenen strenger zu machen und tiefere Schnitte zu ermöglichen, als nach den von GOMORY aufgestellten Kriterien möglich sind. Unter dem Blickwinkel der eben angestellten Untersuchung handelt es sich dabei um die Frage, wie man aus einem bestimmten vorgegebenen LP-Eckpunkt den tiefsten Schnitt ableiten kann. Diese Frage kann man auf der Grundlage der gruppentheoretischen Überlegungen für das GGLP-Problem beantworten: das ist ja gerade der Bereich $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_0)$.

Insofern liefert also die gruppentheoretische Untersuchung eines LP-Eckpunktes Schnitte, die immer mindestens genau die gleiche Tiefe haben wie die GOMORY-Schnittebenen und deren Verbesserungen. Im Zahlenbeispiel zu diesem Kapitel (i-II) zeigt sich, daß der übliche GOMORY-Schnitt, der an einer LP-Ecke möglich ist, oft eine große Unterschätzung des tiefsten dort möglichen Schnittes darstellt.

In Schnittebenenalgorithmen auf gruppentheoretischer Grundlage ist es gegenüber dem Gruppenoptimierungsansatz aus Kap. 321 im Prinzip verhältnismässig einfach, Nichtnegativitätsbedingungen für alle GGLP-Variablen zu beachten; "im Prinzip" bedeutet hier, daß damit nichts über den - eventuell erheblichen - rechnerischen Aufwand gesagt werden soll.

Bei einer solchen Verwendung der Außenflächen von $P^{=}_{X_N}(\bar{g}_o)$ als Schnittebenen können negative Lösungen für die LP-Basisvariablen nicht auftreten, wenn man ein LP-Optimierungsverfahren anwendet, da mit der Beachtung der Bedingungen von (9) Nichtnegativität aller Variablen garantiert ist. Asymptotische Betrachtung bedeutet hier also nicht, daß man, wie bei der Gruppenoptimierung, negative Lösungswerte für die Basisvariablen erzeugen kann, sondern daß im Laufe des Verfahrens eine von den Ganzzahligkeitsbedingungen her nicht zulässige GGLP-Ecke bestimmt werden kann und entsprechend von der der aktuellen Ganzzahligkeitsanalyse zugrundeliegenden Ecke beim augenblicklichen algorithmischen Stand keine zulässige GGLP-Lösung ableitbar ist(Abschnitt (f) und Abb. 9). Man kann in einem solchen Fall fortfahren, indem man die Ganzzahligkeitsstruktur der nach dem vorherigen Schnitt ermittelten Ecke analysiert und daraus neue Schnittebenen herleitet, wie das typischerweise in Schnittebenenverfahren auch durchgeführt wird.

(g) Grundsätzliche Berechnungsmöglichkeit der Außenflächen des GGLP-Polyeders $P^{=}_{X_N}(\bar{g}_o)$

Es werden jetzt einige Aussagen über die Außenflächen von $P^{=}_{X_N}(\bar{g}_o)$ und damit den Bereich (9-ß) gemacht und prinzipiell aufgezeigt, wie man diese Außenflächen rechnerisch bestimmen kann. Für das GGLP-Problem bauen diese Untersuchungen auf der Ermittlung von G_{BZ}, K_{NQ} und K^{N}_{BZ} auf. Abgesehen von der Bestimmung dieser Mengen weist die Analyse gegenüber dem RGLP-

Fall keine Unterschiede auf, wenn man, wie es hier geschehen soll, nur das Ableitungsprinzip herausstellt. Wir werden deshalb in diesem Abschnitt keine strengen Beweise durchführen, sondern verweisen dazu auf die entsprechenden Ausführungen bei GOMORY [1969, S. 467 ff.].

Entsprechend (9-ß) ist mit Außenfläche eine Hyperebene der Form:

$$(17)\quad \bar{d}' \cdot \bar{x}_N \geq d_o$$

gemeint, wobei $\bar{d}'$ irgendeine Zeile aus D darstellt und d_o die zugehörige rechte Seite.

Eine Beziehung der Art (17) stellt dann eine Außenfläche von $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ dar, wenn sie für alle zulässigen $\bar{x}_N$ aus (321-1) erfüllt ist und n_N zulässige Punkte $\bar{x}_N$ die gesamte Hyperebene durch Konvexkombination erzeugen. Die letzte Bedingung besagt, daß alle auf der Außenfläche liegenden Punkte von deren n_N Eckpunkten durch konvexe Linearkombinationen erzeugbar sein müssen.

Für den RGLP-Fall gilt, daß die Außenflächen des Ganzzahligkeitspolyeders nur durch nichtnegative Koeffizienten gebildet werden. Der Beweisgang hat in gleicher Form für das GGLP-Problem Gültigkeit; Interpretationen dieser Nichtnegativität wurden oben schon vorgenommen (d).

Für die Konstruktion der Außenflächen muß man zwischen zwei Fällen unterscheiden, nämlich einmal der Ableitung von Hyperebenen (17) mit $d_o > 0$ und zum anderen von solchen mit $d_o = 0$.

Wenden wir uns zunächst der zweiten Frage zu. Die einzig möglichen Außenflächen mit $d_o = 0$ sind Hyperebenen:

(18) $x_k = 0 \quad (k \in J_N)$

Hyperebenen dieser Art bestehen nur dann, wenn Kongruenz (321-1) auch ohne x_k gelöst werden kann, oder, mit anderen Worten, wenn $\bar{g}_o$ in der über die Variablen $x_j (j \in J_N;\ j \neq k)$ erzeugbaren Untergruppe aus G_{BZ} liegt. Dieser Fall ist z.B. in Abb. 9 enthalten. Ausgehend von p_2 kann man von den Ganzzahligkeitsbedingungen her auf jeden Fall zulässige GGLP-Lösungen erzeugen, indem man entweder die Schlupfvariable von N_B als Nebenbasisvariable positiv setzt und die Schlupfvariable von N_C Null beläßt (Punkt r_1) oder umgekehrt vorgeht (Punkt r_2).

Außenflächen mit $d_o > 0$ lassen sich auf der Grundlage folgender Überlegung sowohl theoretisch als auch praktisch numerisch bestimmen. Die Koeffizienten d_j $(j = 0,1,\ldots,n_N)$ der Hyperebenen seien als Variable betrachtet und die Vektoren $\bar{\underline{x}}_N \in X_N$ als vorgegebene feste Vektoren; X_N ist dabei die Menge aller nichtnegativen Lösungen von (321-1).

Koeffizienten d_j für Außenflächen von $P_{\bar{\underline{x}}_N}(\bar{g}_o)$ erhält man dann als zulässige Basislösungen des Ungleichungssystems:

(19) $\bar{\underline{x}}_N' \ \bar{\underline{d}} \geq d_o \qquad (\forall \bar{\underline{x}}_N \in X_N)$

Jedem $\bar{\underline{x}}_N$ entspricht hier eine Ungleichung. Zulässige Basislösung besagt, daß ein $\bar{\underline{d}}$ abgeleitet wird, welches alle Ungleichungen erfüllt und zusätzlich eine Teilmenge von mindestens n_N Ungleichungen als Gleichung erfüllt.

Auf den ersten Blick sieht diese Beziehung theoretisch zwar elegant, für die Rechenpraxis aber wenig brauchbar aus. Der Eindruck über die geringe numerisch-praktische Ergiebigkeit ist jedoch keinesfalls richtig. Die wichtigsten, bei GOMORY vorgetragenen Bemerkungen zu diesem Problemkreis seien hier zusammengefaßt:

(α) Für d_o in (19) muß nur gelten $d_o > 0$. Wir haben in dem System also Freiheitsgrade, da d_o beliebige positive Werte annehmen kann und dabei, weil $d_o = 0$ ausgeschlossen ist, immer zu derselben Außenfläche führt. Zur Normierung ist es z.B. möglich, $d_o = 1$ zu setzen.

(ß) Die unendliche Zahl zulässiger $\bar{\underline{x}}_N \in X_N$ und damit die unendliche Zahl der Ungleichungen aus (19) reduziert sich auf eine endliche Zahl, wenn man berücksichtigt, daß alle $\bar{\underline{x}}_N$ überflüssig sind, die eine Komponente $\underline{x}_j \geq p_j$ besitzen. p_j sei hier die Ordnung des mit $\nu_S \bar{\underline{a}}_{1j}$ erzeugten Elementes aus G_{BZ} [siehe hierzu Kap. (321-j)].

(γ) Auch die endliche Zahl der durch (ß) eingegrenzten $\bar{\underline{x}}_N \in X_N$ kann noch sehr groß sein. Für die algorithmische Behandlung von System (19) bietet sich deshalb die Verwendung von Verfahren an, die während des Rechenprozesses eine laufende Erzeugung von Zeilen, hier also $\bar{\underline{x}}'_N \in X_N$ ermöglichen.

Die $\bar{\underline{x}}_n$ können wir durch systematische Enumeration über τ^{-1} und τ_{NQ}^{-1} aus dem Nebenbedingungssystem der Gruppenoptimierungaufgabe (321-24) erhalten [siehe (c)]. Da dieses System als Graph erklärbar ist, sind graphentheoretische Ansätze möglich.

An dieser Stelle sollte nur grundsätzlich der Weg gezeigt werden, die Außenflächen von $P_{-\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ numerisch zu bestimmen. Für die Konstruktion leistungsfähiger Algorithmen ist eine weitergehende Untersuchung des GGLP-Polyeders $P_{-\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ notwendig. Bei dieser Analyse kann man auf eine Vielzahl der Ergebnisse für das korrespondierende RGLP-Polyeder zurückgreifen, wie man aufgrund der bisherigen Betrachtungen schon sehen konnte. Diese Ergebnisse können durch eine weitere Ausnutzung des gruppentheoretischen Instrumentariums erarbeitet werden. Eine ausführliche Untersuchung des RGLP-Polyeders und damit gekoppelter höherer Polyeder findet sich bei GOMORY [1969, Kap. II, III]. Verbesserungsvorschläge dazu für Außenflächenberechnungen wurden z.B. von GLOVER gemacht [1969].

Ein Beispiel für die Außenflächenberechnung findet sich in Abschnitt (i).

(h) Sensitivitätsanalyse in bezug auf die GGLP-Zielfunktion

Oben wurde schon darauf hingewiesen, daß auf der Grundlage von $P_{-\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ in geeigneter Weise Sensitivitätsanalysen und parametrische Optimierung für die GGLP-Zielfunktion durchgeführt werden können. Mit anderen Worten kann man über dem durch (9) definierten Bereich die asymptotischen GGLP-Optima für alle GGLP-Zielfunktionen finden, für welche der LP-Eckpunkt optimal bleibt, aus dem $D\ \bar{x}_N \geq \bar{d}_o$ abgeleitet wurde. Das wesentliche Merkmal dabei ist die Möglichkeit, irgendein LP-Optimierungsverfahren anzuwen-

den, das auf der Eckensuche basiert, da alle Ecken von $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ von den Ganzzahligkeitsbedingungen her zulässige GGLP-Lösungen sind.

Für Sensitivitätsanalysen in bezug auf die rechte Seite $\bar{b}$ des GGLP-Problems ist dieser Ansatz dagegen ungeeignet, da $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ für eine bestimmte rechte Seite gemäß $\nu_S P_1 \bar{b} = \bar{g}_o$ definiert ist und entsprechend für unterschiedliche $\bar{g}_o$ neu berechnet werden muß.

Die Sensitivitätsanalyse für die Zielfunktion des GGLP-Problems kann mit den üblichen Verfahren für derartige Analysen bei LP-Problemen durchgeführt werden (vgl. z.B. DINKELBACH [1969]). Den gesamten Gültigkeitsbereich für die GGLP-Sensitivitätsanalyse erhält man dabei, indem man die möglichen Zielfunktionskoeffizienten über dem Bereich (9-α) eingrenzt. Inwieweit innerhalb dieses Bereiches GGLP-Lösungsreaktionen bei Variation der Zielfunktionskoeffizienten auftreten, wird dann durch zusätzliche Berücksichtigung des das Polyeder $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ beschreibenden Ungleichungssystems (9-ß) deutlich.

Eine derartige Anwendung von Schnittebenen findet sich im folgenden Zahlenbeispiel, in dem die GGLP-Lösungsreaktion auf alternative Zielfunktionen aufgezeigt wird.

(i) Zahlenbeispiel

Um das Zahlenbeispiel graphisch interpretieren zu können, aber weiterhin auch das in der gesamten Arbeit benutzte GGLP-Beispiel (1 -g) zu verwenden, sei das diesen Zahlen entsprechende Polyeder $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$ nur im Raum Q^2 der nichtganzzahligen Variablen x_{13} und x_{14} für den Ursprung $\bar{0} \in Z^7$ des ganzzahligen Nebenbasisteils betrachtet. Mit anderen Worten wird das Beispiel so untersucht, als ob gar keine ganzzahligen Nebenbasisvariablen gegeben sind und das gesamte GGLP-Problem nur aus den Variablen x_1 bis x_5 und x_{12}, x_{13} besteht. Ganzzahligkeitskongruenz kann also dann nur durch die einzigen freien Variablen x_{13} und x_{14} erzeugt werden.

Das Zahlenbeispiel ist in die Teile (I) bis (III) aufgegliedert. (I) zeigt verschiedene Polyeder $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$, die unterschiedlichen rechten Seiten $\bar{b}$ zugeordnet sind. In Teil (II) werden für drei rechte Seiten $\bar{b}_9$, $\bar{b}_{10}$ und $\bar{b}_{11}$, deren Bilder in G_{BZ} gleich sind, die Außenflächen des zugehörigen Polyeders nach (19) berechnet. Unter (III) schließlich wird die GGLP-Lösungsreaktion bei einer Änderung von c_{13} und c_{14} gezeigt; hier wird also eine parametrische Optimierung in bezug auf die GGLP-Zielfunktion durchgeführt.

(I) Einige Polyeder $P_{\underline{x}_N}(\bar{g}_o)$

In Abb. 10 sind drei Polyeder zum Zahlenbeispiel wiedergegeben. Wie aus Tab. 9 ersichtlich wird, kann man über:

$$\bar{\underline{a}}_{1,13}\, x_{13} + \bar{\underline{a}}_{1,14}\, x_{14} \quad (x_{13},\, x_{14} \in Q)$$

nicht alle möglichen Reste, die im GGLP-Beispiel auftreten können, eliminieren, sondern nur solche, die einem der Elemente entsprechen, das in die in Tab. 9 wiedergegebene Untergruppe von G_{BZ} fällt. Man kann also alle $\bar{g}_i \in G_{BZ}$ nicht erzeugen, die in der dritten Komponente eine ungerade Zahl besitzen. Für die rechten Seiten $\bar{b}_1$ bis $\bar{b}_6$ (Tab. 7) ist demnach das GGLP-Problem nur mit dem nichtganzzahligen Nebenbasisteil allein nicht lösbar.

Da:

$$\nu_S\, P_1\, \bar{b}_7 = [0,1,4]'$$

ist für $\bar{b}_7$ das GGLP-Problem zu lösen. Das korrespondierende Polyeder ist in Abb. 10 durch die mit Kreisen dargestellten Punkte und die zugehörigen Außenflächen wiedergegeben. Für $\bar{b}_7$ müssen in zulässigen GGLP-Lösungen immer sowohl x_{13} als auch x_{14} positiv sein.

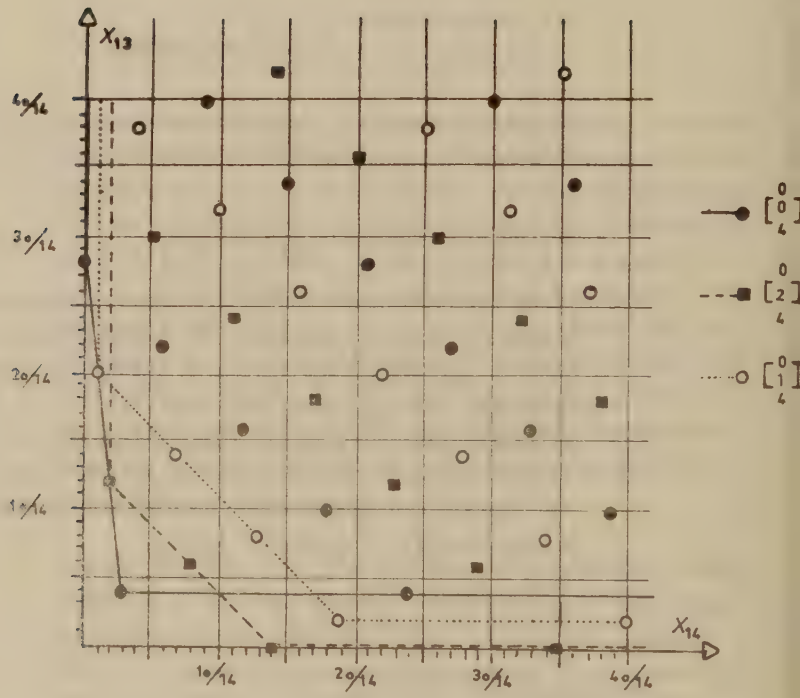


Abb. 10: Drei Polyeder $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$

Für rechte Seiten dagegen, deren Bild in $G_{BZ}\ [0,2,4]'$ ist, kann auch x_{14} allein die Reste der ganzzahligen Basisvariablen eliminieren; x_{14} ist dazu 14/14, 35/14, 56/14, 77/14 usw. zu setzen. Entsprechend kann bei $\bar{g}_o = [0,0,4]'$ x_{13} mit 28/14, 70/14, 114/14,..., also mit 2,5,8,... allein die ganzzahligen Basisvariablen x_1, x_2 und x_3 ganzzahlig machen.

(II) Berechnung von Außenflächen des Polyeders $P_{-\bar{x}_N}(\bar{g}_o)$

In diesem Abschnitt wird eine Berechnung von Außenflächen des Polyeders $P_{-\bar{x}_N}([1,0,0]')$ durchgeführt. Drei rechte Seiten $\bar{b}_9$ bis $\bar{b}_{11}$, die in diese Restklasse fallen, sind in Tab. 14 wiedergegeben.

	$\bar{b}_9$	$\bar{b}_{10}$	$\bar{b}_{11}$
$\bar{b}_j$	2255	2255	2254
	3502	3505	3531
	5247	5247	5250
	1933	1933	1930
	3458	3458	3460
$P_1\,\bar{b}_j$	322	322	324
	538	541	547
	288	294	306

Tab. 14: $\bar{b}_j$ mit $\nu_S P_1\,\bar{b}_j = [1,0,0]'$

Dieses Polyeder ist in Abb.11 dargestellt. Die drei Eck punkte p_1, p_2 und p_3 besitzen die Koordinaten:

	P_1	P_2	P_3
x_{13}	34/14	10/14	4/14
x_{14}	1/14	4/14	10/14

Die Außenflächen des Polyeders kann man prinzipiell entsprechend (19) berechnen. Das Ungleichungssystem lautet:

$$
\begin{array}{rrrrll}
(20) & 34/14\, d_{13} + & 1/14\, d_{14} & \geq 1 & & p_1 \\
& 10/14\, d_{13} + & 4/14\, d_{14} & \geq 1 & & p_2 \\
& 4/14\, d_{13} + & 10/14\, d_{14} & \geq 1 & & p_3 \\
& & & & & \\
& 28/14\, d_{13} + & 7/14\, d_{14} & \geq 1 & & p_4 \\
& 22/14\, d_{13} + & 13/14\, d_{14} & \geq 1 & & p_5 \\
& & & & & \\
& 76/14\, d_{13} + & 1/14\, d_{14} & \geq 1 & & p_6 \\
& 128/14\, d_{13} + & 1/14\, d_{14} & \geq 1 & & p_7 \\
& 4/14\, d_{13} + & 31/14\, d_{14} & \geq 1 & & p_8 \\
& 4/14\, d_{13} + & 52/14\, d_{14} & \geq 1 & & p_9
\end{array}
$$

usw.

In (20) sind einige der für Aufgabe (321-1) insgesamt zulässigen Punkte p_i des Beispiels wiedergegeben. Diese Punkte lassen sich algorithmisch durch eine systematische Enumeration zulässiger Lösungen des Gruppenminimierungsproblems für die rechte Seite $\bar{g}_0 = [1,0,0]'$ ermitteln, wobei als Elemente nur $\bar{g}_i \in K_{BZ}^{NQ}$ (siehe Tab. 9) bei der Konstruktion von Lösungen zugelassen sind.

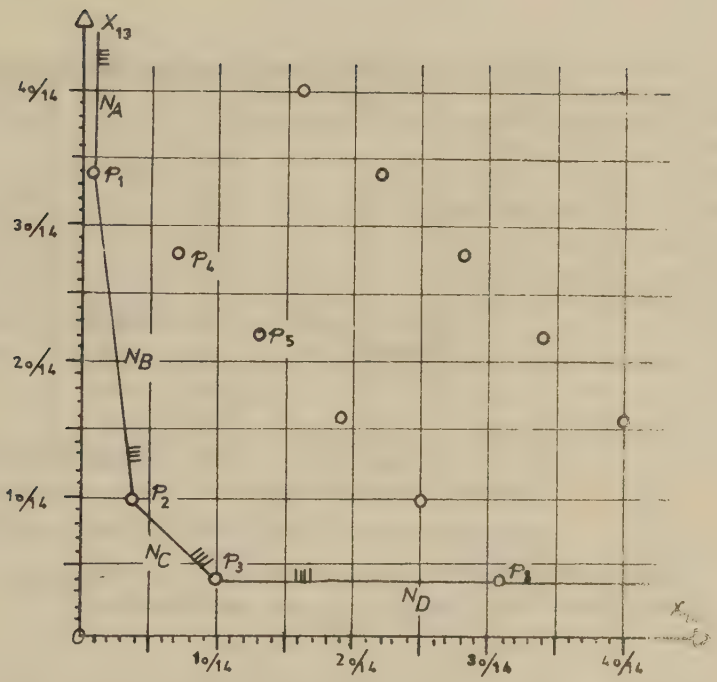


Abb. 11: $P_{\underline{x}_N}$ ($[1,0,0]'$)

In Abb. 11 liegen die Punkte p_1, p_6 und p_7 [siehe (20)] auf der Außenfläche N_A. Andere Punkte dieser Außenfläche erhält man, indem man die x_{13}-Koordinate der Punkte um Vielfache von 72/14 erhöht. Entsprechend liegen p_3, p_8 und p_9 auf N_D; weitere Punkte ergeben sich aus einer Addition der Vielfachen von 21/14 zu der x_{14}-Koordinate dieser Punkte.

Die vier zulässigen Basislösungen des Systems (20) lauten:

(21)

d_{13}	0	1/3	1	14/4
d_{14}	14	8/3	1	0
streng erfüllt	1;6;7	1;2	2;3	3;8;9

In der letzten Zeile von (21) ist die Nummer der streng erfüllten Nebenbedingungen in (20) angegeben. Daraus ergeben sich dann die $P_{x_N}([1,0,0]')$ beschreibenden Ungleichungen:

(22)

$$\begin{aligned} 14\ x_{14} &\geq 1 \\ 1/3\ x_{13} + 8/3\ x_{14} &\geq 1 \\ x_{13} + x_{14} &\geq 1 \\ 14/4\ x_{13} &\geq 1 \end{aligned}$$

Wenn man das optimale LP-Tableau zum GGLP-Beispiel (Tab. 2) um diese 4 Ungleichungen bei gleichzeitiger Einführung von Schlupfvariablen x_{S1} bis x_{S4} ergänzt, erhält man das in Tab. 15 wiedergegebene Tableau.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_{13}	x_{14}	x_{S1}	x_{S2}	x_{S3}	x_{S4}	$\bar{b}_9$	$\bar{b}_{10}$	$\bar{b}_{11}$
1					-0.333	11.333					24.000	26.000	32.000
	1				0.000	-9.333					35.333	33.333	29.333
		1			0.333	2.666					48.000	49.000	51.000
			1		0.583	1.583					148.583	144.583	133.333
				1	-0.416	0.750					34.916	33.416	30.166
					0.000	-14.000	1				-1	-1	-1
					-0.333	-2.666		1			-1	-1	-1
					-1.000	-1.000			1		-1	-1	-1
					-3.500	0.000				1	-1	-1	-1

Tab. 15: LP-optimales GGLP-Tableau nach Einführung der Außenflächen von $P_{\underline{x}_N}$ ($[1,0,0]'$) als Schnittebenen

Dieses Tableau (15) hat die von Schnittebenenalgorithmen her bekannte Form nach Einführung der Schnittebenen: Das System ist dual zulässig und primal unzulässig. Da mehrere Zielfunktionen für die Sensitivitätsanalyse verwendet werden, sind die Zielfunktionskoeffizienten in Tab. 15 nicht angegeben. Die umgerechneten c_j^* müssen größer/gleich Null sein, da ja nur für den Bereich eine GGLP-Sensitivitätsanalyse durchgeführt werden kann, in dem die optimale LP-Basislösung unverändert bleibt und demnach $c_j^* \geq 0$ gilt. Das Tableau ist primal unzulässig, da alle als Schnittebenen eingeführten Außenflächen einen Schlupf von -1 haben. Dies geht aus den Spalten $\bar{b}_9$, $\bar{b}_{10}$ und $\bar{b}_{11}$ hervor, in

denen die Lösungswerte für die Basisvariablen bei jeder der drei betrachteten rechten Seiten angegeben sind.

Wenn man am optimalen LP-Eckpunkt unseres Beispiels eine übliche GOMORY-Schnittebene für den GGLP-Fall ableitet, erhält man, da nur x_2 die Ganzzahligkeitsbedingungen verletzt, aus dem in Tab. 15 eingerahmten Tableauelement die Bedingung:

(23) $9{,}333\ x_{14} \geq 0{,}333$,

Daraus ergibt sich durch Normierung der rechten Seite auf 1:

(24) $28\ x_{14} \geq 1$.

Diese Bedingung ist schwächer als die erste Bedingung von (22). Sie führt damit noch nicht zu einer zulässigen GGLP-Lösung. Weiterhin sind Informationen über die Bedingungen (2) bis (4) aus (22) über GOMORY-Schnittebenen aus dem optimalen LP-Eckpunkt des GGLP-Problems überhaupt nicht erhältlich.

(III) Parametrische GGLP-Optimierung in bezug auf die Zielfunktion

Über dem durch Tab. 15 beschriebenen Bereich des GGLP-Beispiels wurde eine parametrische Optimierung in bezug auf die Zielfunktionskoeffizienten der Variablen x_{13} und x_{14} vorgenommen. Um das Beispiel übersichtlich zu halten, werden nur diese Koeffizienten abgewandelt, während die Zielfunktionskoeffizienten der Basisvariablen x_1 bis x_5 in der Ausgangsgröße (Tab. 1) festgehalten sind.

		1	2	3	4
Parameter		c_{13}= 519 c_{14}=-3800	c_{13}= 464 c_{14}=-2800	c_{13}=-1000 c_{14}=-2800	c_{13}= 464 c_{14}=-2800
$\bar{b}_9$	x_1	24	21	16	24
	x_2	36	38	42	35.333
	x_3	47	47	46	48
	x_4	147.054	147.714	147.286	148.583
	x_5	35.875	35	34.500	34.916
	ZF	178 201.143	178 220.000	177 795.714	178 280.000
$\bar{b}_{10}$	x_1	26	23	18	26
	x_2	34	36	40	33.333
	x_3	48	48	47	49
	x_4	143.054	143.714	143.286	144.583
	x_5	34.375	33.500	33	34.416
	ZF	178 321.143	178 340.000	177 915.714	178 400.000
$\bar{b}_{11}$	x_1	32	29	24	32
	x_2	30	32	36	29.333
	x_3	50	50	49	51
	x_4	131.804	132.464	132.036	133.333
	x_5	31.125	30.250	29.750	30.166
	ZF	179 361.143	179 380.000	178 955.714	179 440.000
Korrektur	x_{13}	34/14	10/14	4/14	0
	x_{14}	1/14	4/14	10/14	0
	Ecke	p_1	p_2	p_3	0

Tab. 16: Ergebnisse parametrische GGLP-Optimierung in bezug auf die Zielfunktion

Die Ergebnisse dieser Untersuchung für die drei rechten Seiten $\bar{b}_9$, $\bar{b}_{10}$ und $\bar{b}_{11}$ wurden mit einem parametrischen Simplex-Algorithmus über dem Bereich Tab. 15 errechnet und sind in Tab. 16 ausgewiesen. Für die Zielfunktionskoeffizienten c_{13} und c_{14} wurden dabei jeweils drei unterschiedliche Konstellationen zugrundegelegt. Die Zielfunktionskoeffizienten sind in ihrer auf die Ausgangsbasis bezogenen Form c_j wiedergegeben und nicht als umgerechnete Koeffizienten c^*_j.

Spalte 2' von Tab. 16 enthält Variablen- und Zielfunktionswerte, wenn man das GGLP-Problem für $c_{13} = 464$ und $c_{14} = -2800$ als LP-Problem berechnet. Die Spalten 1,2 und 3 geben die errechneten optimalen GGLP-Lösungen für die in der Kopfzeile ausgewiesenen Zielfunktionskoeffizienten wieder.

In den letzten Zeilen von Tab. 16 sind die optimalen Werte für x_{13} und x_{14} angegeben und der korrespondierende Eckpunkt aus Abb. 11.

Es sei noch einmal hervorgehoben, daß alle Eckpunkte p_1, p_2 und p_3 mit zulässigen GGLP-Lösungen korrespondieren. Abgesehen von mehrfachoptimaler Lösung kann jedoch nur eine Ecke optimal sein. Wenn man z.B. für das Problem mit der Zielfunktion entsprechend Spalte 2 die Korrektur $x_{13} = 34/14$ und $x_{14} = 1/14$ anwendet, die für Zielfunktion Spalte 1 optimal ist, ergibt sich bei $\bar{b}_9$ ein Zielfunktionswert von 178.139 gegenüber dem optimalen von 178.220, also ein schlechterer Wert.

Interessant ist insgesamt gesehen, daß die Sensitivität der GGLP-Lösungen verhältnismäßig groß ist wie man aus einem Vergleich der Lösungswerte in den einzelnen Zeilen von Tab. 16 entnehmen kann, obwohl die zugrundeliegende LP-Ecke unverändert bleibt.

Literaturverzeichnis

ALCALY, R.E., KLEVORICK, A. [1966] : A Note on the Dual Prices of Integer Programming. In: Econometrica, 34 (1966), S. 206 ff.

BALAS, E. [1968-1] : Duality in Discrete Programming. Technical Report No. 67-5, Second Revision, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh 1968

BALAS, E. [1968-2] : Duality in Discrete Programming : IV. Applications. Management Sciences Report No. 145, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh 1968

BALAS, E. [1969] : The Intersection Cut - A New Cutting Plane for Integer Programming. Management Sciences Report No. 187, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh 1969

BALAS, E. [1970] : Intersection Cuts from Maximal Convex Extensions of the Ball and the Octahedron. Management Sciences Research Report No. 214, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh 1970

BAUMGARTNER, L. [1964] : Gruppentheorie, Berlin 1964

BENDERS, J.F. [1962] : Partitioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems. In: Numerische Mathematik, 4(1962), S. 238-252

BRAUER, K. [1968] : Binaere Optimierung, Saarbruecken 1969

DANTZIG, G.B. [1966] : Lineare Programmierung und Erweiterungen. Berlin-Heidelberg-New York 1966

DINKELBACH, W. [1969] : Sensitivitaetsanalysen und parametrische Programmierung, Berlin-Heidelberg -New York 1969

FRANK, C.R. [1967] : Parametric Programming in Integers. In: Operation Research Verfahren, Hrsgb. R. HENN, Bd. III, Meisenheim 1967

GLOVER, F. [1966] : An Algorithm for Solving the Linear Integer Programming Problem over a Finite Additive Group, with Extension to Solving General Linear and Certain Nonlinear Integer Problems. ORC 66-29, Op. Res. Cent., Univ. of Calif., Berkeley 1966

GLOVER, F. [1969] : Faces of the Gomory Polyhedron. Working Paper 69-59, Graduate School of Business, The Univ. of Texas at Austin, Austin 1969

GOMORY, R.E. [1958] : An Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs. In: Recent Advances in Mathematical Programming, edit. by R.L. GRAVES and Ph. WOLFE, New York-San Francisco-Toronto-London 1963. S. 269-302

GOMORY, R.E. [1959] : An Algorithm for the Mixed Integer Problem. In: Americ. Math. Soc. Notices, 6(52), 1959

GOMORY, R.E. [1965] : On the Relation between Integer and Non-Integer Solutions to Linear Programs. In: Proc. Nat. Acad. of Sc., 53(1965), S. 260-265

GOMORY, R.E. [1967] : Integer Faces of a Polyhedron. In: Proc. Nat. Acad. of Sc., 57(1967), S. 16-18

GOMORY, R.E. [1969] : Some Plolyhedra Related to Combinatorial Problems. In: Linear Algebra and its Applications, 2(1969), S. 451-558

GOMORY, R.E., BAUMOL, W.J. [1960] : Integer Programming and Pricing. In: Econometrica, 28(1960), S. 521-550

GROEBNER, W. [1966] : Matrizenrechnung, Mannheim 1966

HU, T.C. [1968] : On the Asymptotic Integer Algorithm. MRC Report 946, Univ. of Wisconsin, Madison 1968

HU, T.C. [1969] : Integer Programming and Network Flows. Menlo Park-London-Don Mills 1969

KORTANEK, K.O., JEROSLOW, R. [1968] : An Exposition on the Constructive Decomposition of the Group of Gomory-Cuts and Gomory's Round-off Algorithms. Techn. Rep. No. 39, Dep. of Op. Res., Cornell University, 1968

KORTE, B. [1970] : Ganzzahlige Programmierung - Ein Ueberblick. Diskussionspapier Nr. 11, Forschungsgruppe fuer Op. Res. und Oekonometrie, Universitaet Bonn, 1970

LAND, A.H., DOIG, A.G. [1960] : An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems. In: Econometrica, 28(1960), S. 497-520

MARTENSEN, E. [1969] : Analysis I, Mannheim 1969

MITTEN, L.G. [1970] : Branch-and-Bound Methods : General Formulation and Properties. In: Op. Res., 18(1970), S. 24-34

NASTANSKY, L. [1970] : Zum asymptotischen Algorithmus zur Loesung ganzzahliger linearer Programmierungsaufgaben. Diskussionspapier; Vortrag auf der 14. Jahrestagung des AKOR beim AWF, Wien 1. bis 3. April 1970

NOLTEMEYER, H. [1970] : Sensitivitaetsanalyse bei diskreten linearen Optimierungsproblemen. Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems Nr. 30, Berlin-Heidelberg-New York 1970

SCHOLZ, A., SCHOENEBERG, B. [1966] : Einfuehrung in die Zahlentheorie, Berlin 1966

SHAPIRO, J.F. [1968] : Dynamic Programming Algorithms for the Integer Programming Problem - I: The Integer Programming Problem Viewed as a Knapsack Type Problem. In: Op. Res., 16(1968), S. 103-121

SHAPIRO, J.F. [1968] : Group Theoretic Algorithms for the Integer Programming Problem - II: Extension to a General Algorithm. In: Op. Res., 16(1968), S. 928-947

UEBE, G. [1969] : Rueckgerechnete duale Variable. In: Unternehmensforschung, 13(1969), S. 123-140

V.D. WAERDEN, B.L. [1966] : Algebra, I. Teil, 7. Aufl. der modernen Algebra. Berlin-Heidelberg-New York 1966

V.D. WAERDEN, B.L. [1967] : Algebra, II. Teil, 5. Aufl. der modernen Algebra, Berlin-Heidelberg-New York 1967

WEYL, H. [1966] : Algebraische Zahlentheorie. Mannheim 1966

WHITE, W.W. [1966] : On a Group Theoretic Approach to Linear Integer Programming. ORC 66-27, Op. Res. Cent., Univ. of Calif.,

Abkürzungen

GLP	ganzzahlig linear
GGLP	gemischt-ganzzahlig linear
LP	linear
mod	modulo
RGLP	rein-ganzzahlig linear

Sonderzeichen

		Allg.Def.
$\tilde{=}$	ist isomorph	221-12
$\equiv$	ist kongruent	221-17
:=	ist definiert als; ergibt sich als	
$\oplus$	Gruppenoperator; direktes Produkt	221-9
[ ]	Matrizen,die durch ihre Elemente (Skalare,Spalten, Zeilen oder Teilmatrizen) dargestellt sind , sind eckig geklammert	
| |	bei Skalaren : absoluter Betrag bei Mengen : Zahl der Elemente	
$\| \; \|$	bei Vektoren : Euklid'sche Vektornorm	

Indizes

In der Arbeit werden bestimmte Indizes immer wieder verwandt. Diese Indizes geben den Bezug der indizierten Größe zu einem der in Tab. 1 zusammengefaßt herausgestellten Kriterien an.

	Bedeutung der Einzel-Kurzzeichen
1	Bezug auf die ersten n_{BZ} -Zeilen des GGLP-Tableaus.
2	Bezug auf die letzten n_{BQ} -Zeilen des GGLP-Tableaus.
B	Bezug auf den Basisteil der optimalen LP-Lösung des GGLP-Problems.
N	Bezug auf den Nebenbasisteil der optimalen LP-Lösung des GGLP-Problems.
Q	Bezug auf nichtganzzahlige, also rationale Variable
Z	Bezug auf ganzzahlige Variable

	Bedeutung der kombinierten Kurzzeichen entsprechend Vereinbarungen oben
BZ	
BQ	
NZ	
NQ	
Q1	
Q2	
Z1	
Z2	

Matrizen und Mengen

Matrizen und Mengen (Gruppen , Vektorräume , Zulässigkeitsbereiche) sind durch Großbuchstaben dargestellt.

		Allg.Def.	Beispiel
A	(m•n)-Koeffizientenmatrix Ausgangsproblem	1 -3	Tab.2
B	Nichtsinguläre (m•m)-Teilmatrix aus A; Basisteil von A	1 -d	Tab.2
B^*	Allgemeine Gitterbasen	222-8	222-j
B^*_{Z1}	Teilmatrix aus der Inversen B^{-1} von B	1 -d	
$\underline{\underline{B}}$	Strukturierte Basis ; $\underline{\underline{B}}=P \cdot B$	231-e	231-j
C	Transformierte Matrix bei Elementarteilerableitung	222-f,g	Tab.5
D	Koeffizientenmatrix Außenflächengleichungen von $P_{\underline{x}_N}(\underline{E}_0)$	33-9-ß	Tab.15
E	Einheitsmatrix		
G(B)	Durch die Basis B definiertes Gitter	222-a	
$\mathcal{G}$	Gruppe		
$\mathcal{G}_{BZ}$	Faktorgruppe GGLP-Problem	232-8	232-45
$\mathcal{G}(B)$	Durch die Basis B definierte Gruppe		
$\mathcal{G}^1_{NQ}$	Faktorgruppe einer Teilmenge des Nebenbasisteils	242-22	

		Allg.Def.	Beispiel
J	Indexmenge		
K_{NQ}	Menge aller n_{NQ}-Vektoren $\underline{\bar{y}}, \bar{0} \leq \underline{\bar{y}} < \bar{1}$, die über $\underline{\underline{N}}_Q$ ganzzahlige Vektoren produzieren	242-27	Tab.8
K^N_{BZ}	Menge aller über den Nebenbasisteil ableitbaren Elemente von $\mathcal{G}_{BZ}$	321-19	Tab.10
K^{NQ}_{BZ}	Menge aller über den nichtganzzahligen Nebenbasisteil ableitbaren Elemente von $\mathcal{G}_{BZ}$	242-g	Tab.9
K^{NZ}_{BZ}	Menge aller über den ganzzahligen Nebenbasisteil ableitbaren Elemente von $\mathcal{G}_{BZ}$	232-i	Tab.6
N	$(m \cdot n_N)$-Teilmatrix aus A ; Nebenbasisteil von A	1 -d	Tab.2
$\underline{\underline{N}}$	$\underline{\underline{N}} = P \cdot N$	231-e	Tab.6
$\underline{\underline{N}}_{Q1}$	$(n_{BZ} \cdot r)$- Teilmatrix aus $\underline{\underline{N}}_{Q1}$ mit Rang r	242-b	
P	Unimodulare Matrix	222-g	Tab.4
P_1	Matrix aus den ersten n_{BZ} Zeilen aus P		
P^d_B	Zulässigkeitsbereich $\bar{b}$	321-i	
Q^i	Körper rationaler i-Vektoren		
Q	Unimodulare Matrix	222-g	Tab.4

		Allg.Def.	Beispiel
$P_{\underline{x}_E}(B,N,\bar{b})$	Asymptotischer Zulässigkeitsbereich GGLP-Problem als Polyeder (Raum"eigentlicher" Variablen)	321-b	Abb.2
$P_{\underline{x}_N}(G_{BZ},K^N_{BZ},\bar{g}_0)$ = $P_{\underline{x}_N}(\bar{g}_0)$	Asymtotischer Zulässigkeitsbereich GGLP-Problem als Polyeder (Raum LP-Nebenbasisvariablen)	321-h	Abb.8
S	Elementarteilermatrix	222-4	Tab.4
$\underline{\underline{S}}_{Z1}$	Elementarteilermatrix für GGLP-Problem	231-e	Tab.5
Z^i	Ring ganzzahliger i-Vektoren		

Vektoren

Vektoren sind immer durch kleine lateinische Buchstaben dargestellt, die mit einem Querstrich überstrichen sind. Diese Vektoren sind immer als Spaltenvektoren definiert; wenn ein Zeilenvektor gemeint ist, wird dies durch das Transponiert-Zeichen < ' > ausgedrückt.

		Allg.Def.	Beispiel
$\bar{0}$	Nullvektor		
$\bar{1}$	Einsvektor (alle Komponenten = 1)		
$\bar{a}_j$	j-te Spalte aus $A = [B,N]$		
$\underline{\bar{a}}_j$	j-te Spalte aus $\underline{A}$		
$\underline{\bar{a}}_{1j}$	j-te Spalte aus $\underline{A}_1$		
$\bar{a}^*_j$	j-te Spalte aus $B^{-1} \cdot A$	1 -d	Tab.3
$\underline{\bar{a}}_1$	Aus $\underline{N}_{Q1}$ ableitbarer ganzzahliger Vektor $\underline{\bar{a}}_1 \in K_{BZ}^{NQ}$, $\underline{\bar{a}}_1 = \nu_S \, \underline{N}_{Q1} \cdot \bar{y}$	242-g	Tab.8
$\bar{b}$	Rechte Seite GGLP-Problem	1 -b	
$\underline{\bar{b}}_1$	$P_1 \cdot \bar{b}$	232-a	Tab.7
$\bar{b}_j$	j-te rechte Seite Zahlenbeispiel	1 -g	Tab.7
$\bar{c}$	n-Vektor Zielfunktionskoeffizienten	1 -a	
$\bar{c}^*$	n-Vektor umgerechnete Zielfunktionskoeffizienten	1 -9	Tab.3

		Allg.Def.	Beispiel
$\bar{c}^{+}_{NQ}$	< Minimale Kostenzuordnung Nebenbasisteil >	321-13	
$\bar{c}^{0}$	q-Vektor der Zielfunktionskoeffizienten des Gruppenminimierungsproblems	321-23	Tab.10
$\bar{d}_o$	Rechte Seite Außenflächengleichung von $P_{\bar{x}_N}(\bar{g}_0)$	33-9-ß	Tab.13
$\bar{e}_i$	i-ter Einheitsvektor		
$\bar{g}_i$	i-tes Gruppenelement aus $K^N_{BZ} \subset G_{BZ}$	321-21	Tab.10
$\bar{g}_0$	$\nu_S \cdot P_1 \bullet \bar{b} = \nu_S \, \bar{b}_{=1}$	321-24	Tab. 7
$\bar{u}$	Variablenvektor Gruppenminimierungsproblem	321-24	
$\bar{x}$	Variablenvektor GGLP-Problem	1-1	
$\bar{y}$	rationaler n_{NQ}-Vektor mit maximal n_{BZ} positiven Koeffizienten , der über $\underset{\sim}{N}_{Q1} \bullet \bar{y} = \bar{z}$ ganzzahliges $\bar{z}$ erzeugt ; $\bar{y} \in K_{NQ}$	242-e, 242-25	Tab.8
$\bar{v}$	rationaler r-Vektor , korrespondiert mit $\underset{\sim}{N}_{Q1}$	242-b, 242-25	

Sonstige Alphabetzeichen

		Allg.Def.	Beispiel
m	Zahl der Nebenbedingungen GGLP-Problem	1 -2	Tab.2
μ	Isomorphismus	221-12	
n	Zahl der Variablen GGLP-Problem	1 -2	Tab.2
ν	Homomorphismus	221-13	
ν_E	Homomorphismus : Reduktion mod E	232-f	
ν_S	Homomorphismus : Reduktion mod $\bar{S}_{Z1}$	232-9	Tab.6
s_i	i-ter Elementarteiler aus S	222-4	Tab.4
τ	Transformation in Gruppenopti mierungsproblem	321-d	Tab.10
τ_{NQ}	Transformation nichtganzzahliger Nebenbasisteil in ganzzahliges Äquivalent	321-d	Tab.8,9

Tabellen

		Kapitel
1	Positionsangaben vereinbarter Matrizen und ihre Dimensionen	1 -d
2	Ausgangsdaten GGLP-Beispiel gemäß Aufgabe (1)	1 -g
3	Ausgangsdaten GGLP-Beispiel gemäß Aufgabe (13)	1 -g
4	Elementarteilerbestimmung	222-j
5	GGLP-Strukturierung	231-g
6	Transformation der Spalten aus $[B , N_Z]$ in Gruppenelemente von $\mathcal{G}_{BZ}$	232-j
7	Transformation alternativer rechter Seiten $\bar{b}_j$ in Gruppenelemente von $\mathcal{G}_{BZ}$	232-j
8	Ermittlung von K_{BZ}^{NQ} aus dem nichtganzzahligen Nebenbasisteil	242-i
9	Festlegung von K_{BZ}^{NQ} einschließlich Bewertung der Elemente	242-i
10	Die Bestimmung des Gruppenminimierungsproblems über τ	321-e
11	Rechenschema zur Gruppenoptimierung und asymptotische Lösung für x_N	321-e
12	GGLP-Optima für acht rechte Seiten $\bar{b}_j$ des GGLP-Beispiels	321-e
13	GGLP-Zielfunktionsreaktion bei marginalen Änderungen von $\bar{b}$	322-f
14	$\bar{b}_j$ mit $\nu_S P_1 \cdot \bar{b}_j = [1,0,0]'$	33-i
15	LP-optimales GGLP-Tableau nach Einführung der Außenflächen von P_{x_N} ($[1,0,0]'$)	33-i
16	Ergebnisse parametrische GGLP-Optimierung in Bezug auf die Zielfunktion	33-i